

Äänestämisen ongelmia

Nykyaikainen demokratia perustuu kansan tekemään valintaan. Luonnollisestikaan ei voida olettaa, että kokonainen kansakunta voisi tehdä yksimielisen päätöksen, joten kansan mielipide pitää selvittää jotenkin. Erilaisilla vaaleilla saadaan selville monenlaisia asioita, mutta niistä saatavien tulosten käsittely ei ole niin yksinkertaista kuin usein annetaan ymmärtää. Äänestämistä voidaan tutkia matemaattisella mallilla, jossa äänestäjät asettavat vaihtoehdot järjestykseen, ja näistä pitää muodostaa ryhmän yhteinen arvojärjestys. Esimerkiksi tavallista äänestystä voi mallintaa tällä menetelmällä siten, että voittajaksi valitaan se, joka on useimpien arvojärjestyslistalla korkeimmalla.

Yksinkertaisella esimerkillä voidaan osoittaa, kuinka suuri merkitys on tavalla, jolla äänet lasketaan. Vaaligallupin mukaan 55 äänestäjän mielipiteet jakautuvat taulukon 1 osoittamalla tavalla. Ehdokkaat saavat tietää nämä, ja tämä synnyttää keskustelua siitä, miten äänet pitäisi laskea. Jokaisella onkin oma näkemyksensä asiasta.

Ehdokas A:n mielestä asia on selvä: pidetään yksinkertainen

äänestys, jonka voittaa eniten ääniä saanut. Koska A:lla on eniten ykköspaikkoja, hän voittaa tällä menetelmällä.

B kannattaa Suomessakin presidentinvaaleissa käytettävää kahden kierroksen järjestelmää. Kaksi parasta pääsevät jatkoon, ja näiden kesken pidetään uusi äänestys paremmuudesta. Tässä tapauksessa B pääsisi toiselle kierrokselle A:n kanssa, ja voitaisi sen ylivoimaisesti 37–18.

C:n ehdotus on niin sanottu arvojärjestysäänestys, jota käytetään esimerkiksi Yhdysvalloissa joissain yhteyksissä. Äänestäjä merkitsee äänestyslippuun, ketä äänestää ensimmäisenä vaihtoehdonaan, ketä toisena ja ketä kolmantena jne. Jos joku ehdokkaista saa suurimman osan ykkösäänistä, hän on voittaja. Jos näin ei käy, vähiten ykkössijoja saanut pudotetaan pois, ja hänen äänestäjiensä äänet siirtyvät äänestäjien toiselle vaihtoehdolle. Tätä jatketaan kunnes joku ehdokkaista saa yksinkertaisen enemmistön. Tässä tapauksessa E saisi lähteä ensimmäisenä, ja tämä nostaisi B:n kannatuksen 16:een ja C:n kannatuksen 12:een. Sitten pudotettaisiin D, ja C:n kannatus olisi jo 21. Sitten putoaisi B ja lo-

pulta A. C jäisi jäljelle voittajaksi.

Ehdokas D:n mielestä ensimmäiset sijat saavat muiden ehdotuksissa liikaa painoarvoa, ja hän ehdottaakin painotettua valintatapaa, jota kutsutaan Bordan järjestelmäksi. Ykkössijasta saa esimerkiksi viisi pistettä, kakkossijasta neljä, kolmossijasta kolme, nelossijasta kaksi ja viitossijasta vain yhden pisteen. Tällä tavalla laskettuna A saisi 127 pistettä, B 156 pistettä, C 162 pistettä, D 191 pistettä ja E 189 pistettä. D siis voitaisi.

E haluaisi käyttää Concordet'n järjestelmää. Siinä tutkitaan jokaista mahdollista paria, ja katsotaan kumpi näistä on suosituimpi. Paria tutkittaessa ehdokas saa pisteen jokaista sellaista äänestäjää kohti, joka on asettanut hänet arvojärjestyksessä vertailuparia korkeammalle. Näistä parien keskinäisistä järjestyksistä voidaan tietynlaisella pisteytyksellä ratkaista voittaja. E tietää, että Concordet'n järjestelmään liittyy niin kutsuttu Concordet'n ongelma, joka on se, että suosio ei ole transitiivista. Siitä, että A on suosituimpi kuin B ja B suosituimpi kuin C ei voi tehdä sitä johtopäätöstä, että A on suosituimpi kuin C. Taulukko 2 on yksinkertaisin mahdollinen esi-

merkki tästä ongelmasta. Tässä esimerkkinä äänestyksessä Concordet'n ongelmaa ei kuitenkaan ole. Verrataan E:tä esimerkiksi A:han. Ainoastaan 18 äänestäjää haluaisi mieluummin A:n kuin E:n. E:tä kannattaa 37 äänestäjää. E siis voittaa A:n 37–18. Samalla tavalla hän voittaisi B:n 33–22, C:n 36–19 ja D:n 28–27.

	18	12	10	9	4	2
1.	A	B	C	D	E	E
2.	D	E	B	C	B	C
3.	E	D	E	E	D	D
4.	C	C	D	B	C	B
5.	B	A	A	A	A	A

	1	1	1
1.	A	B	C
2.	B	C	A
3.	C	A	B

Arrow'n teoreema

Vuosina 1948 ja 1949 Kenneth J. Arrow päätti kehittää täydellisen äänestysjärjestelmän, ja sitä varten hän kehitti aksiomat, jotka sen tulisi toteuttaa. Yllättäen hän huomasi, että jos ehdokkaita on yli kaksi, ei mikään äänestysjärjestelmä voi toteuttaa näitä aksiomia. Tätä tulosta kutsutaan Arrow'n teoreemaksi tai Arrow'n paradoksiksi, ja hänelle myönnettiin siitä vuonna 1972 taloustieteen Nobel-palkinto. Arrow'n aksiomat ovat seuraavanlaiset.

- Äänestysjärjestelmällä voi muodostaa mistä tahansa annetuista arvojärjestyksistä ryhmän yhteisen arvojärjestyksen.
- Jos kaikkien yksittäisten äänes-

täjien antama arvojärjestys on sama, on tämän oltava on myös ryhmän arvojärjestys.

- Jos vaihtoehtoja lisätään tai poistetaan, ei entisten vaihtoehtojen järjestys saa muuttua. Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että jos ryhmä pitää ehdokasta A parempana kuin ehdokasta B, tämä järjestys ei saa muuttua, jos joukkoon lisätään uusi ehdokas D tai jos siitä poistetaan jo mukana ollut C.
- Vaihtoehdon saama lisätuki ei saa laskea sen sijoitusta. Jos ryhmä pitää vaihtoehtoa A parempana kuin vaihtoehtoa B ja ryhmään liittyy uusi jäsen, joka myöskin pitää vaihtoehtoa A parempana kuin B, ei näiden kahden vaihtoehdon keskinäinen järjestys saa muuttua. Myöskään jos jokin jo mukana olevista äänestäjistä nostaa vaihtoehto A:ta ylöspäin listallaan, tämä ei saa laskea A:n sijoitusta koko ryhmän listalla.
- Kukaan äänestäjistä ei ole diktaattori. Kenelläkään äänestäjistä ei siis ole niin suurta valtaa, että hänen arvojärjestyslistansa olisi automaattisesti sama kuin koko ryhmän arvojärjestyslista.

Järjestelmien vertailu

Vaikka Arrow'n todistus onkin hyvin vahva tulos, olisi väärin tulkita sen tarkoittavan sitä, että mikään vaalijärjestelmä ei voisi olla hyvä tai että ne kaikki olisivat yhtä hyviä tai huonoja. Arrow'n teoreeman tärkein etu on, että se antaa hyvän pohjan eri menetelmien teoreettiseen vertailuun.

Steven Brams on tutkinut ansiokkaasti äänestystapoja, ja hän on esittänyt seuraavan valaisevan esimerkin, joka näyttää käytännössä miten kahden kierroksen järjestelmä ei täytä sitä ehtoa, jonka mukaan lisäsuosio ei saa aiheuttaa sijoituksen puto-

amista.

Äänestäjien mielipiteet olivat taulukon 3 mukaiset. Toiselle kierrokselle pääsevät A ja B kumpikin kuuden äänen turvin. Kun C putoaa pois, siirtyvät ne viisi, jotka äsken kannattivat C:tä A:n puolelle, ja A voittaa.

Kuvitellaan, että tämä tuleva voittaja, ehdokas A, olisikin juuri ennen vaalipäivää tehnyt jonkin sankariteon – pelastanut lapsen hukkumiselta tai kissan puusta – ja tästä vaikuttuneina kaksi B:tä alun perin kannattanutta äänestäjää olisivat nostet A:n ensimmäiseksi vaihtoehdokseen. Tämä olisi johtanut siihen, että toiselle kierrokselle olisikin päässyt A:n kanssa C, joka olisi voittanut A:n yhdellä äänellä. Tämän sankaritekonsa takia A olisi siis menettänyt voiton.

	6	5	4	2
1.	A	C	B	B
2.	B	A	C	A
3.	C	B	A	C

Concordet'n järjestelmässä, jota alun esimerkin ehdokas E ehdotti, äänestäjät asettavat ehdokkaat järjestykseen ja ehdokas saa pisteen jokaisesta voittamastaan ehdokkaasta. Tasapisteiden ratkaisemiseksi sovitaan jokin toinen menetelmä. Concordet on teknisesti vahva menetelmä, sillä se toteuttaa kaikki muut ehdot paitsi ehdokkaiden lisäämistä ja poistamista koskevan ehdon. Lisäksi tämä ehto voidaan korvata hieman heikommalla ehdolla, jolloin Concordet'n järjestelmä toimii silläkin.

Tämä heikompi ehto perustuu niin kutsuttuun Smithin joukkoon. Ehdokkaiden joukosta voidaan aina valita joukko, joka on *pienin mahdollinen sellainen joukko, että jokainen tähän joukkoon kuuluva voittaa kahdenkes-*

kisessä kamppailussa jokaisen tähän joukkoon kuulumattoman. Tähän joukkoon voi kuulua vain yksi paras ehdokas tai monta tasavahvaa ehdokasta. Alun esimerkiksi Smithin joukkoon olisi kuulunut vain ehdokas E. Lievennetty ehdokkaiden lisäämistä koskeva ehto kuuluu: sen sijaan että keitä tahansa ehdokkaita saisi lisätä ja poistella, vaaditaan, että vain Smithin joukkoon kuulumattomia ehdokkaita saa lisätä ja poistella.

Hyväksyntä-äänestys on toinen teknisesti melko vahva äänestystapa, ja erityisesti monet asiantuntijat ovat mieltyneet siihen. Siinä äänestäjät joko antavat tai eivät anna hyväksyntäänsä kullekin ehdokkaalle. Suurimman hyväksynnän saanut ehdokas voittaa. Concordet'n järjestelmään verrattuna hyväksyntä-äänestyksen etu on selvästi yksinkertaisuus. Se on kuitenkin melko erilainen tavallisiin äänestystapoihin verrattuna ja vaatisi totuttelua. Monia saattaisi ihmetyttää vaikkapa se, että tässä äänestystavassa voisi äänestää vaikka kaikkia ehdokkaita. Tämä on toki mahdollista, mutta tällöin tulos olisi sama kuin jos jättäisi äänestämättä kokonaan.

Painotetut äänestykset

Joskus eri äänestäjien äänillä ei ole tarkoitukseen olla yhtä suurta merkitystä, ja tällöin ajautetaan uudenlaisiin ongelmiin. Tyypillinen tällainen tapaus on esimerkiksi osakeyhtiö, jolla on useita omistajia. Yhtiöllä on kolme omistajaa, jotka omistavat 47%, 44% ja 9% yhtiöstä. Kun sääntöehdotuksesta päätetään, kukin saa niin monta prosenttia äänistä, kuin omistaa yhtiötä, ja äänestää kaikilla äänillään samaa. Jos ehdotus saa taakseen aidon enemmistön (51%), se hyväksytään. Kukaan näistä kolmesta ei yksin saa ehdotusta läpi, mutta ketkä tahansa kaksi heistä voivat saada ehdotuksen hyväksytyä. Heillä on

siis yhtä paljon valtaa.

Aikaa on kulunut ja yhtiö on muuttunut ja saanut uuden osakkaan. Nyt omistukset ovat 27%, 26%, 25% ja 22%. Viimeisellä osakkaalla, joka omistaa 22% on melko huonot oltavat. Hän ei saa ehdotusta läpi yksin eikä yhden kumppanin kanssa (27% + 22% = 49%). Hän tarvitsee kaksi kumppania, mutta ketkä tahansa kaksi muuta saavat ehdotuksen läpi jo keskenäänkin. Tämän osakkaan on turha äänestää, sillä hänen mielipiteensä ei voi vaikuttaa lopputulokseen.

Nämä kaksi esimerkkiä osoittavat, että tällaisissa tapauksissa todellisen vallan määrää ei voi suoraan päätellä prosentuaalisesta vallasta. Monimutkaisempien tapausten tarkasteluun voidaan käyttää Banzhafin valtaaindeksiä, joka määrittää niiden äänestysten määränä, joissa kyseisen äänestäjän äänen muuttumisen olisi vaikuttanut lopputulokseen. Otetaan esimerkiksi yhtiö, jolla on neljä omistajaa, jotka omistavat: A 40%, B 35%, C 15% ja D 10%. Mahdollisia äänestyksiä on $2^4 = 16$. Jos muiden antama kannatus on 10% tai alle, A ei voi muuttaa tilannetta. Tämä on mahdollista silloin kun kukaan muu ei äänestä puolesta tai kun ainoastaan D äänestää puolesta. Näissä kahdessa vaihtoehdossa A:lla on edelleen kaksi vaihtoehtoa, joten saadaan 4 tapausta, joissa A ei voi

vaikuttaa. Jos muiden kannatus on yli 50%, ei A voi myöskään muuttaa tilannetta, joten tästä saadaan myös 2 tilannetta, joissa A ei voi vaikuttaa. Koska A ei voi vaikuttaa 6 tilanteessa, hän voi vaikuttaa lopuissa 10 tilanteessa, ja A:n valtaaindeksi on 10. Vastaavalla tavalla voidaan laskea kaikkien valtaaindeksit, ja saadaan A = 10, B = 6, C = 6, ja D = 2. Nämä indeksit ovat suhteellisia, ja ne voidaan tulkita esimerkiksi niin, että C:n ääni ratkaisee kolme kertaa niin usein kuin D:n ääni. Tämä selittää hyvin sitä, miksi pienistä puolueista saattaa usein tuntua, että ne eivät pääse vaikuttamaan mihinkään.

Veli Peltola

Kirjallisuutta

- [1] Lewis, H. W.: *Miksi heittää lantia? hyvien päätösten tie ja taide*. Helsinki: Terra cognita, 1999, Hakapaino
- [2] Paulos, John Allen: *A Mathematician Reads the Newspaper*. New York: BasicBooks, 1995



Valmennuskursseja Teknilliseen korkeakouluun

Matematiikan ja fysiikan kurssit

Teekkarien järjestämiä ja vetämiä

Laskuharjoitukset pienryhmissä

Sisäänpääsy 90% vuonna 2001

Kurssipaikkana Helsinki

Ajankohta 2 - 22.5.2002

hinta 310 € / kurssi

sis. 28 t luentoja, 28 t laskuharjoituksia pienryhmissä, simuloituidut pääsykokeet, etukäteistehtäviä ja kurssimateriaalin

www.tietopoli.fi

Tietopoli Oy
Otakaari 22
02150 Espoo

Puh: 09 466 559
Fax: 09 468 3184

e-mail: info@tietopoli.fi
web: www.tietopoli.fi

VALMENNUSKURSSEJA TEKNILLISEEN KORKEAKOULUUN
TIETOPOLI