

Seepia₄

Perjantai 1.6. 2001

Tässä numerossa Vanajan hiihtäjä

3. Sienisolut
6. Kiertoratamekaniikkaa
9. Aritmetiikkaa geometrialla
12. Latina – elävä kuollut kieli
14. Julian joukot – fraktaaleja kompleksitasolla
21. Metafysiikan ominaisuuksista

Seepia on neljä kertaa vuodessa ilmestyvä tiedelehti. Sitä jaetaan ilmaiseksi Helsingin matematiikka- ja luonnontiedelukioiden opiskelijoille.

Päätoimittaja:

Teemu Varis

Toimituskunta:

Aapo Ahola

Petri Arvo

Sam Harwick

Einar Karttunen

Jaakko Kortesharju

Veli Peltola

Sampo Tiensuu

Pekka Tolvanen

Teemu Varis

Jari Varje

Ulkoasu:

Sampo Tiensuu

Toimitukseen voi ottaa yhteyttä sähköpostitse:

toimitus@seepia.org tai koulujen sisäisen postin kautta (Ressun lukio / Pekka Piri).

Seepian kotisivut ovat Internetissä osoitteessa:

<http://www.seepia.org/>

Olemme kiitollisia palautteesta, korjauksista ja kysymyksistä.

Mikäli haluaisit kirjoittaa artikkelin Seepiaan, ota yhteyttä.

Seepian toimituksella on ylin päätösvalta julkaistavan materiaalin suhteen. Emme vastaa tilaamattoman materiaalin säilyttämisestä tai palauttamisesta.

Artikkelien tekijänoikeudet ovat niiden kirjoittajilla. Kuvien tekijänoikeuksien haltijat on mainittu niiden vieressä. Seepialla on kuitenkin oikeus korvauksetta käyttää uudelleen siinä julkaistua materiaalia.

Seepian edellisiä numeroita voi tilata jälktilauksena hintaan 5 mk/kpl + postitus- ja käsittelykulut 20 mk niin kauan kuin painosta riittää.

Mies seisoo keskellä Vanajavettä. On siis talvi, ja koko valtava järvi on jäässä. Niin, tämä mies seisoo keskellä avarinta Vanajanselkää Kalvolan, Hattulan ja Valkeakosken kuntien rajalla sijaitsevassa saarella; jalassa hänellä on sukset ja selässä teodoliitti eli sellainen koje, jolla mitataan kulmia maastossa. Ja ehkä vähän näkkileipää muonitukseen.

Mies lähtee liikkeelle ja hiihtää pitkällä metsäsuksillaan 100 täyttä suksenmittaa kohtisuoraan länteen päin, kunnes pysähtyy. Hän pystyttää teodoliittinsa ja määrittää edestäpäin suunnan, joka on kymmenen astetta eli 11,11... goonia¹⁾ hänen äsken kulkemastaan suunnasta vasemmalle. Tästä suunnasta hän ottaa kiintopisteen, ja kulkee sitä kohti jälleen 100 suksenmittaa. Teodoliittinsa avulla hän ottaa uuden suunnan: 20 astetta edellisestä suunnasta vasemmalle. Hän siis kaksinkertaistaa edellisen suunnanmuutoksen, ja hiihtää jo tutuksi tulleen matkan, tarkasti suoraa linjaa noudattaen. Näin miehemme jatkaa, kääntyen aina vasemmalle kaksi kertaa edellisen käännöksen verran ja sitten hiihtäen aina saman matkan.

Käännökset, jotka mies tekee, muodostavat siis jonon: 10, 20, 40, 80, 160, jne. Kysymys kuuluu: minne ihmeeseen mies päättyy? Tampereelle vai Hämeenlinnaan? Tilanne olisi toki yksinkertaisempi, mikäli ensimmäinen kulmanmuutos olisi ollut 45. Silloin matka kävisi seuraavan näköistä rataa pitkin luoteeseen (Nokialle):

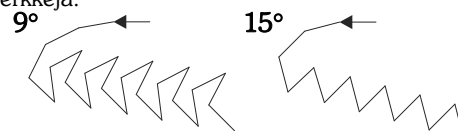


Tehtävässämme mies kuitenkin näantyy nälkään ellei ymmärrä lopettaa. Näin retki etenee:



Kuvio on rekursiivista prosessia kuvaava tasokäyrä. Kuvaajan perusteella näyttäisi neljänkymmenen asteen käännöksen jälkeen prosessissa toistuvan eräs jakso loputtomasti. Kulmajonon jaksojen toisiaan vastaavien jäsenten arvo modulo 360 on siis sama. Myös muilla astelukemilla ilmenee reitissä tavalla tai toisella geometrisesti jaksollista kehitystä, mutta millä tavalla astelukema tarkalleen ottaen vaikeuttaa geometrisen kuvion laatuun sääntöä toistettaessa?

Esimerkkejä:



Seepia julistaakin lukijoilleen kilpailun, jossa tehtävä on seuraava: Selvitä, millä perusteilla geometrien kuvio riippuu annetun kulman kokonaislukusuhteista (esim. 9/360, 10/360). Kaikki vastaukset huomioidaan, ja paras ehdotus palkitaan vaelluskompassilla.

Aapo Ahola

1) Maanmittaajat jakavat ympyrän neljäänsataan gooniin (g). Suorassakulmassa on tällöin "looginen" määrä kulmayksiköjä, 100g.

Sienisolut

Sienikunta on laaja eliölajien ryhmä: se sisältää niin kaikille tutut perinteiset sienet kuten tatit, rouskut ja haarakkaat, mutta myös useita muita kaaria¹⁾. Sieniin kuuluvat myös mm. homeet, hiivat²⁾ ja limasienet. Jäkälät puolestaan ovat sienen ja levän symbiooseja... Tutkijat eivät vielä tänä päivänä ole yhtä mieltä sienien luokittelusta, ja sienten, protokistien, eläinten ja kasvien erottaminen toisistaan on joissakin tapauksissa hyvin ongelmallista.

Kaikilla sienillä katsotaan kuitenkin olevan joitakin yhteisiä piirteitä. Sienet ovat heterotrofisia eli toisenvaraisia. Ne käyttävät ympäristön ravinteita hyödykseen, mutta eivät syö saalistaan kuten eläimet, vaan erittävät ruoansulatussyntyympäriilleen. Sienet ovat usein lahottajia, loisia tai symbiontteja. Sienet lisääntyvät itiöistä joko suvullisesti tai suvuttomasti. Niiden perusrakenne koostuu tavallisesti hyyfien eli sienirihmojen muodostamasta rihmastosta. Sienisolulla on soluseinä, joka on useimmiten kitiniä. Lisäksi solujen tumat ja kromosomit ovat erittäin pieniä.

Sienisoluja on monenlaisia, vaikka erilaisten solujen kirjo yhdessä yksilössä onkin suppeampi

kuin monimutkaisemmilla eliöillä. Sienten toiminnallisena yksikkönä on tavallisesti hyyfi. Hyyfeissä on usein monta tumaa, eikä se jakaudu selkeästi soluihin. Hyyfin voidaan ajatella olevan eräänlainen useiden solujen yhteensulautuma. Toisaalta esim. hiivat ovat usein yksisoluisia ja eräät rihmamaiset sienet jakautuvat selvästi soluihin. Sienisolut ovat aitotumallisia ja sienillä on sekä haploidinen että diploidinen vaihe.

Hyyfien muoto ja koko vaihtelee suuresti hyyfin sijainnin ja tehtävien mukaan. Lajien väliset erot ovat kuitenkin selviä. Tyypillisen hyyfin koko vaihtelee 3-12µm välillä. Hyyfejä erottaa toisistaan soluseinä. Korkeampien sienien³⁾ hyyfit jakautuvat osastoihin. Osastojen koko vaihtelee 25-

75µm välillä. Rihmaston kärjessä on usein muita 5-10 kertaa suurempi kärkeä kohti suippeneva hyyfi.

Ascomycota- eli kotelosienten rihmoissa on usein monta tavallisesti, ja kärkihyyfi sisältää usein 5-15 kertaa enemmän tumia kuin muut hyyfit. Poikkeuksen muodostaa lahko Saccharomyces (hiivasienet), jotka esiintyvät yleisimmin yksittäisinä silmikoitumalla lisääntyvinä soluina. Basidiomyceteiden rihmoissa on usein yksi tai kaksi tumaa, riippuen rihmojen sijainnista.

Sienten tumat ovat pieniä (1-2µm) verrattuna eläinten ja kasvien tumiin, eikä niissä ole paljon

3) nimityksellä tarkoitetaan kaaria Ascomycota (kotelosienet) ja Basidiomycota (kantasiemet).



Kuva 1: Taulakääpä on kovua lahottava sieni, jonka monivuotisia itiöemiä on käytetty mm. tulen tekemiseen. Keskikokoinen taulakääpä tuottaa keväällä noin 600 000 itiötä sekunnissa.

1) Kaari on kasvikunnan luokituksessa käytettävä pääryhmä. Eläinkunnassa sitä vastaa pääjakso.

2) On kiistanalaista ovatko hiivat alkueliöitä vai sienimäisiä alkueliöitä.

kromosomeja. Tämä tekee niiden tutkimisen vaikeaksi, vaikka geenien määrä on pienehkö. Sienisolujen DNA on yleensä kiertyneenä neljän histonin muodostaman ryhmän ympärille. Histonien aminohappokoostumus eroaa jonkun verran kasvien ja eläinten vastaavasta. Erityisesti sienisoluille on tyypillistä nukleosomien välinen lyhyt etäisyys. Eräillä sienillä on osoitettu olevan myös vähäisiä määriäromosomeihin liittymätöntä DNA:ta.

Sienten DNA:ssa on vain vähän toistuvia jaksoja - yleensä vähemmän kuin 10%. Useilla nisäkkäillä vastaava osamäärä on 30%. Useimmat toistot lienevät geeneissä, jotka koodaavat rRNA:ta. Introneja on sienien DNA:ssa yleensä vähemmän ja ne ovat lyhyempiä kuin kehittyneemmissä soluissa.

Sienisolut sisältävät mitokondrioita kuten eläinsolutkin. Nämä eivät kuitenkaan ole solun selviytymisen kannalta aina välttämättömiä, sillä useat sienisolut selviävät anaerobisissa olosuhteissa, tosin kasvaen hitaammin. Mitokondrioiden määrä vaihtelee huomattavasti kuten kasvi- ja eläinsoluillakin. Mitokondrioiden kokokin vaihtelee suuresti: solussa saattaa olla esimerkiksi viisi isoa haaroitunutta mitokondriota tai 20 pientä yksittäistä mitokondriota. Sienisolujen mitokondrioissa on runsaasti mtDNA:ta⁴⁾, usein jopa kolme kertaa enemmän kuin ihmisellä. mtDNA:n vastuulla on sienten mitokondrioissa, enemmän asioita kuin varsin yksinkertaisissa nisäkkäiden mitokondrioissa - nisäkkäillä vastaavat tehtävät hoitaa tumen DNA. mtDNA voi mitokondrioiden lukumäärän vuoksi muodostaa jopa 5-25% sienisolun DNA:sta.

4) mtDNA eli mitokondrio DNA. Mitokondriot sisältävät perintökijöitä, joita ne tarvitsevat toiminnassaan.



Kuva 2: Limakkosienen keskenkasvuisia itiömiä

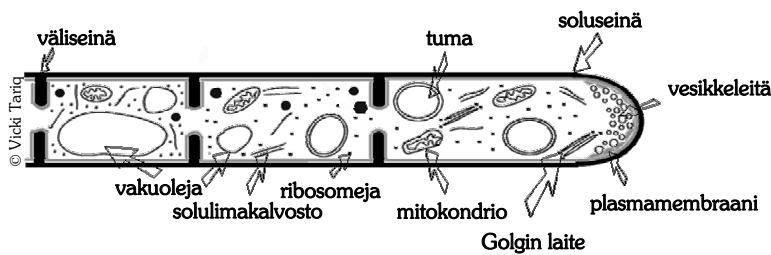
Bakteerisoluisissa yleiset plasmidit ovat harvinaisia sienisoluisissa. Niitä on tavattu joillakin lajeilla, mutta on epäselvää osallistuvatko ne isäntäsolunsa toimintaan. On esitetty, että sienten plasmidit ovat vain DNA:n kappaleita, jotka vain pyrkivät monistamaan itseään ilman että ne edesauttaisivat sientä mitenkään.

Sienisolut - kuten kaikki muutkin solut - kärsivät viruksista. Sienivirukset sisältävät usein dsRNA⁵⁾:ta ja ovat muodoltaan isometrisiä eli suunnilleen pallomaisia. Virusten yleisyys vaihtelee lajeittain, joidenkin lajien melkein jokaisessa yksilössä on virus, toisilla viruksia ei ole havaittu. Sienivirukset eivät tartu helposti, ja sienten välinen tartunta vaatii usein protoplastin. Useille sieniviruksille on myös tyypillistä, että dsRNA-molekyylit ovat omissa erillisissä kapsleissaan eivätkä yhdessä vaipan suojaamassa kapselissa. Sienivirukset eivät useinkaan ole kovin vaarallisia sienille, vaikka joitakin poikkeuksia on. Niinpä viruksia onkin havaittu enimmäkseen eri-

5) dsRNA (double stranded RNA) kaksijuosteinen RNA.

tyisissä tutkimuksissa. Sienisoluisa esiintyy myös jonkin verran vaipaita dsRNA-molekyyliä, joilla ei ole suojanaa minkäänlaista vaippaa ja käyttäytyvät usein virusmaisesti, vaikkakin aiheuttaen vähemmän haittaa kuin varsinaiset virukset.

Solut pyrkivät varastomaan toiminnalleen tärkeitä aineita, sillä solun ympärillä on harvoin riittävästi kaikkia mitä se tarvitsisi. Sienisolut sisältävät suuria määriä hiiltä, jota ne pyrkivät varastomaan monin tavoin. Sienisolut säilyttävät hiiltä usein lipideissä, rasvakuplissa ja glykogeeninä. Glykogeeni on soluissa liukenemattomina makromolekyyliä. Glykogeeni voi olla jopa 10% solun kuivapainosta. Hiiltä varastoidaan myös pienimolekyyliin yhdisteisiin. Monosakkaridit ovat sienisoluisissa harvinaisia, ja selvästi yleisin yhdiste on pienimolekyylinen sokeri trehaloosi. Myös mannitoli ja arabitol sekä muut moniarvoiset alkoholit ovat tyypillisiä varastoaineita. Trehaloosi ja moniarvoiset alkoholit muodostavat usein solun kuivapainosta jopa 15%. Pienimolekyyliin yhdisteitä



Kuva 3: Hyyfin rakenne

varastoidaan usein tiettyjä tehtäviä varten kun taas isomolekyylliset ovat usein materiaalivarastoja. Monet sienet varastoivat useiden protokistien tavoin fosforia polyfosfaattiina erityisiin jyväsiin.

Solujen ympärillä on puoliläpäisevä solukalvo. Sienisolujen solukalvon rakennetta ei tunneta

kovin hyvin, mutta sen päärakennusaineena on ergosteroli, kun taas eläimillä se on kolesteroli. Solukalvon ulkopuolella on polysakkarideja kuten galaktaania.

Sienillä kuten kasveillakin on soluseinät. Hyyfin seinämä rakentuu yleensä kitiinistä, mutta useimmilla Oomycota- eli mu-

nasienillä se on selluloosaa. Kitiini on lineaarinen polymeeri, joka tunnetaan myös hyönteisten tukirakenteiden rakennusmateriaalina. Hyyfien seinämien rakenne on usein monimutkainen, ja seinämät sisältävät usein muitakin polymeerejä. Seinämän vahvuus perustuu usein useimmiten komposiittirakenteeseen tai molekyylikuitujen ominaisuuksiin. Hyyfien seinien rakenne vaihtelee suuresti niiden sijainnin ja tehtävän mukaan. Monesti pitkälle kehittyneiden seinien ulkopuolella on vielä erillinen ulkoseinä. Sienisolujen seinissä on usein myös jonkun verran lipidejä, ja joillakin sienillä melaniineja, jotka suojaavat soluja mikrobeilta.

Korkeampien sienillä on usein hyyfien seinissä aukko, jonka kautta voi joskus siirtyä hyyfistä toiseen soluliman lisäksi tumia. Aukkojen läheisyydessä on usein ns. Woronin kappaleita⁶⁾, jotka siirtyvät tukkimaan aukon, jos vierinen hyyfi on vioittunut.

Sienisolut ovat oma selvästi erillinen ja mielenkiintoinen ryhmänsä muiden solutyyppejen joukossa. Ne eroavat selkeästi muista aitotumallisista soluista muodostan välimuodon kasvien, eläinten ja protokistien välille. Sienten tutkimus ja tuntemus on mullistunut viimevuosikymmeninä mikrobiologian kehityksen myötä. Niiden tuntemus käynee tulevaisuudessa yhä tärkeämmäksi geeniteknikan edistyessä.

Einar Karttunen

Kirjallisuutta

- [1] Härkkönen, Marja; Ukkola, Tarja; Helsingin yliopiston kasvitieteen monisteita 162 – Sienten rakenteen ja systematiikan pääpiirteitä. Yliopistopaino, Helsinki 1998
- [2] Härkkönen, Marja; Koponen, Hilkka; Renvall, Pertti; Stenroos, Soili; Helsingin yliopiston kasvitieteen monisteita 120 – Sientieteen perusteet. Yliopistopaino, Helsinki 1990
- [3] Carlile, Michael J.; Watkinson, Sarah C.; *The Fungi*. Academic press, Iso-Britannia, Bath 1997

6) englanniksi Woronin body.



Kuva 4: Kokonaiskantaisten (*Holobasidiomycetidae*) alaluokkaan kuuluva myrkyllinen *Amanita virosa*, joka kasvaa yhdysvaltojen itäosissa.

Kiertoratamekaniikkaa



Kiertoratamekaniikka on mekaniikan ala, joka tarkastelee kappaleiden liikkeitä gravitaatiovoimien vaikutusten alaisina. Tässä artikkelissa tarkastellaan aihetta satelliittien ja avaruusalusten näkökulmasta.

Avaruudessa kappaleisiin ei vaikuta muita kuin gravitaatiosta johtuvia voimia, sillä väliainetta ja siten ollen vastusta ei käytännössä ole. Tämän takia liike avaruudessa on hyvin lainalaista ja siksi kohtuullisen helppoa tarkastella, jos kappaleita on vain kaksi. Useamman kappaleen systeemisä matemaattinen tarkastelu on erittäin vaikeaa, jollei jopa mahdollontta. Satelliittien kohdalla tätä ongelmaa ei kuitenkaan ole, koska ongelmat käsittelevät yleensä satelliitteja kiertoradalla, jolloin Aurion ja muiden taivaankappaleiden vaikutusta ei juuri tarvitse huomioida.

Avaruusalukset liikkuvat avaruudessa siis tiettyjä ratoja pitkin, jotka Keplerin ensimmäisen lain mukaan ovat ellipsejä (ympyrä on ellipsin erikoistapaus). Jotta aluksen kiertorata saataisiin määri-

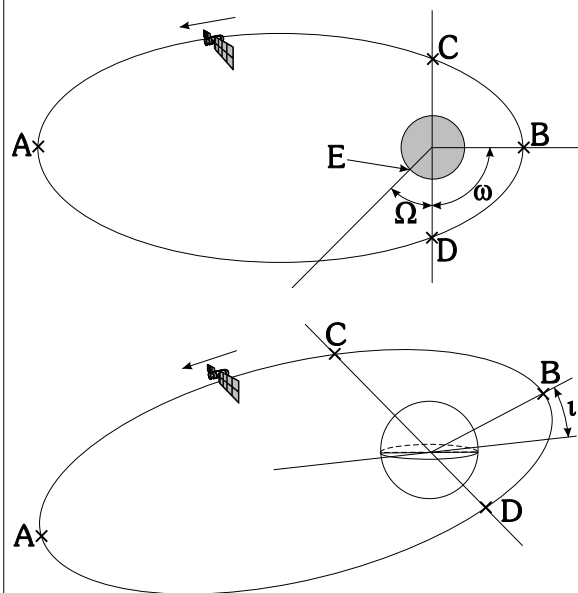
tettyä, on tunnettava radasta kuusi ns. rataelementtiä: isoakselin puolikas, eksentrisyys, inkliinaatio, nousevan solmun pituus, perigeumin argumentti sekä perigeumaika.

Isoakselin puolikas on puolet rataellipsin isoakselin pituudesta. Eksentrisyys on lukuarvo, joka saadaan, kun rataellipsin polttopisteiden välimatka jaetaan isoakselin pituudella. Tämä luku määrää radan muodon. Ympyräradalla eksentrisyys on nolla. Inkliinaatio on kiertoradan ja kierrettävän kappaleen ekvaattoritason välinen kulma. Nouseva solmu on kiertoradan piste, jossa satelliitti nousee radallaan Maan ekvaattoritason pohjoispuolelle. Vastaavasti laskeva solmu on piste, jossa siirrytään eteläpuolelle. Nousevan solmun pituus on nollapituuspiiriin ja solmun välinen kulma.

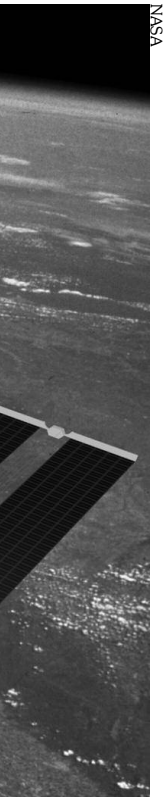
Perigeum on ellipsiradan piste, joka on lähimpänä Maata. Aurinkoa kierrettäessä vastaava piste on nimeltään periheli. Kauimmainen piste on nimeltään apogeu (apheli). Perigeumin argumentti on perigeumin ja nousevan solmun välinen kulma. Perigeumaika on hetki, jolloin satelliitti

ohittaa perigeuminsa.

Näiden rataelementtien avulla voidaan edelleen laskea radan apogeu- ja perigeumetäisyydet sekä määrittää aluksen tarkka paikka radalla. Näitä tietoja voi-



Kuva 2: Kuva, jossa Maapallo on harmaa ympyrä, on kuvattu kohtisuoraan ratatasoa vasten. Toinen kuva on kolmiulotteinen. Kumpikin kuva esittää samaa rataa. Merkkien selitykset: A = apogeu, B = perigeum, C = laskeva solmu, D = nouseva solmu, E = nollapituuspiiri, Ω = nousevan solmun pituus, ω = perigeumin argumentti, i = inkliinaatio.



Kuva 1:
Kansainvälinen
ISS-avaruusasema

daan käyttää siirtymä ratojen, laukais- ja laskeutumisikkunoiden sekä kohtaamisaikojen määrittämiseen. Seuraavassa johdetaan joitakin peruskaavoja lähtien liikkeelle tutuista mekaniikan laeista.

Kauniita kaavoja

Newtonin ensimmäisen lain mukaan kappale jatkaa suoraviivaista liikettä, mikäli siihen ei vaikuta voimia. Ympyräradalla kiertävään kappaleeseen vaikuttaa siis jokin voima, joka vetää kappaletta pois suoralta radalta. Kiertoratamekaniikan kohdalla kyseessä on gravitaatio, jonka suuruus saadaan Newtonin gravitaatiolaista. Tämä voima aiheuttaa kappaleeseen keskeiskiihtyvyyden, joka on siis yhtä suuri kuin normaalkiihtyvyys ympyräradalla. Näistä voidaan ratkaista nopeudeksi r -säteisellä ympyräradalla M -massaisen kappaleen ympärillä:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \quad (1)$$

Kaavassa ei oteta huomioon satelliitin massaa, koska se on kierretävään taivaankappaleeseen, esim. Maahan, verrattuna merkityksetön, jolloin se ei aiheuta mainittavaa muutosta Maan liiketilassa.

Kulmaliikemäärän säilymisen periaatteen perusteella ellipsiradalla kappaleen kulmaliikemäärä on joka hetkellä vakio eli $L = mv_\phi r = \text{vakio}$ [3 s.64]. Radan kahdelle mielivaltaiselle pisteelle voidaan siis kirjoittaa $mv_{\phi 1} r_1 = mv_{\phi 2} r_2$, mistä massat supistuvat. Jos näiksi kahdeksi pisteeksi määrätään perigeum ja apogeum, voidaan kirjoittaa $r_p v_p = r_a v_a$, missä alaindeksi p tarkoittaa perigeumia ja a apogeumia [1].

Energian säilymislain mukaan kappaleen liike-energian ja potentiaalienergian summa on vakio. Voidaan siis kirjoittaa:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{\gamma mM}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{\gamma mM}{r_a}.$$

Tämän yhtälön sekä yhteyden $r_p v_p = r_a v_a$ avulla saadaan ratkaistua nopeudet ja säteet ellipsiradan perigeumissa:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M r_a}{r_p(r_a + r_p)}} \quad (2)$$

$$r_p = \frac{r_a}{\frac{2\gamma M}{v_a^2 r_a} - 1} \quad (3)$$

Apogeumissa vastaavat nopeudet ja säteet saadaan vastaavasti vaihtamalla alaindeksit a :sta p :ksi ja p :stä a :ksi, mikä voidaan osoittaa johtamalla kyseiset kaavat.

Kiertoaika tasaisessa ympyräliikkeessä on $T = 2\pi r/v$. Tähän sijoittamalla ratanopeuden kaava (1) saadaan kiertoajaksi

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} \quad (4)$$

Tämä pätee myös ellipsiradoille, jos säteen tilalla käytetään isoakselin puolikasta $\frac{1}{2}a$ [1]. Ympyräradallahan isoakseli $a = 2r$, jolloin $\frac{1}{2}a = r$.

Isoakselin puolikkaan $\frac{1}{2}a$ ja eksentrisyyden e avulla voidaan laskea perigeumin ja apogeumin etäisyydet kaavoilla [1]

$$r_p = \frac{a}{2}(1-e) \quad (5)$$

$$r_a = \frac{a}{2}(1+e) \quad (6)$$

Näistä saadaan johdettua kaava isoakselin puolikkaalle, kun tunnetaan säteet:

$$\frac{a}{2} = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (7)$$

Näiden avulla päästään siis käsiksi kiertoratamekaanisiin ongelmiin, jos tiedetään vain rataelementit.

Avaruusalennon mekaniikka

Käytännössä näitä kaavoja käytetään ongelmissa, joissa on selvítettävä nopeudenmuutokset,

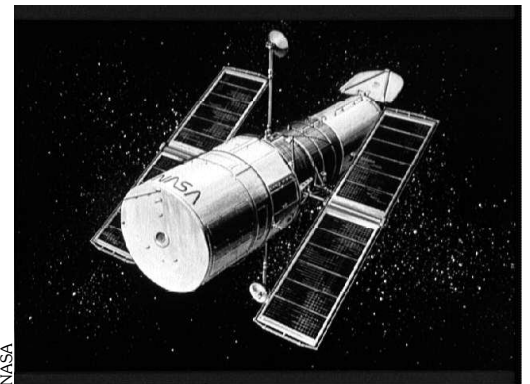
jotka avaruusaluksen on tehtävä siirtyäkseen kiertoradalta toiselle. Esimerkiksi matalan kiertoradan satelliitin on ajoittain korotettava ilmanvastuksen takia madaltunutta rataansa. Tällöin energian kannalta edullisin keino on laittaa satelliitti ellipsiradalle, jonka apogeum on halutun radan korkeudella. Ensimmäinen poltto suoritetaan tämän ns. siirtymäradan perigeum-pisteessä. Toinen poltto tarvitaan apogeum-pisteessä, jotta rata saataisiin uudelleen ympyräradaksi. Tällaisen tehtävän nopeudenmuutokset eli delta- v :t on helppo laskea.

Esimerkki 1:

ISS-avaruusaseman rata on ilmakehän ulko-osien vastuksen takia pudonnut ympyräradaksi 325 km korkeuteen. Tehtävänä on laskea tarvittavat delta- v :t polttoja varten, jotta rata saadaan palautettua 400 km korkeuteen.

Ratkaisu:

Ratojen säteet eli siirtymäradan perigeum- ja apogeum-pisteet ovat $r_1 = r_p = 6703140 \text{ m}$ ja $r_2 = r_a = 6778140 \text{ m}$. Satelliitin nopeudet alemmalla ja ylemmällä ympyräradalla saadaan kaavasta (1): $v_1 = 7711 \text{ m/s}$ ja $v_2 = 7668 \text{ m/s}$. Nopeudet siirtymäradan apogeumissa ja perigeumissa saadaan sijoittamalla kaavaan (2): $v_p = 7732 \text{ m/s}$ ja $v_a = 7647 \text{ m/s}$. Näin voidaan laskea polttojen edellyttämät delta- v :t: $\Delta v_1 = v_p - v_1 = 21 \text{ m/s}$ ja $\Delta v_2 = v_2 - v_a = 21 \text{ m/s}$. Ensimmäisessä poltossa



Kuva 3: Hubble-avaruusteleskooppi

nopeutta on siis kiihdytettävä 21 m/s. Tämän jälkeen odotetaan puoli kiertoaikaa, jonka jälkeen toisessa poltossa nopeutta kiihdytetään vielä 21 m/s, jolloin ollaan ympyräradalla 400 km korkeudessa.

Vastaavasti voidaan laskea tarvittavat delta- v :t, jos halutaan pudottaa rataa. Tällöin arvot ovat luonnollisesti negatiiviset.

Edellä esitelty siirtymäradan määrittäminen on vielä hyvin yksinkertaista, mutta tehtävä vaikeutuu hieman, jos mukana on aikarajoitus. Tällöin otetaan käyttöön ns. laukaisuikkuna, joka tarkoittaa hetkeä, jolloin poltto on suoritettava, jotta alus olisi oikeassa paikassa oikeaan aikaan. Tämä on usein tilanne, kun on laskettava siirtymärajoja kahden aluksen välistä kohtaamista varten.

Esimerkki 2:

Hubble-avaruusteleskooppi kiertää Maata 750 km korkeudella ympyräradalla. Teleskoopin ohjausjärjestelmää korjataan lähetetty Endeavour-avaruussukula on ympyräradalla 350 km korkeudella. Laske tarvittavat poltot sekä hetki, jolloin poltto on suoritettava, jotta Endeavour saapuisi Hubblen luo. Hetkellä $T=0$ h 0 min 0 s Endeavour sijaitsee radallaan $40^\circ W$ pituuspiirin yläpuolella ja Hubble $10^\circ E$ yläpuolella. Ratojen inkliinaatiot ovat samat.

Ratkaisu:

Perigeum- ja apogeum-etäisyydet: $r_1 = r_p = 6728140$ m ja $r_2 = r_a = 7128140$ m. Nopeudet ympyräradoilla kaavasta (1): $v_1 = 7697$ m/s ja $v_2 = 7479$ m/s. Nopeudet siirtymäradan perigeumissa ja apogeumissa kaavasta (2): $v_p = 7807$ m/s ja $v_a = 7369$ m/s. Tarvittavat nopeudenmuutokset polttoja varten: $\Delta v_1 = v_p - v_1 = 110$ m/s ja $\Delta v_2 = v_2 - v_a = 110$ m/s. Nyt on siis saatua tarvittavat poltot ratkaistua, enää ratkaistavana on ajoitus. Ulomman radan

kiertoaika on kaavalla (4) laskettuna $T_1 = 5492$ s. Siirtymäradan kiertoaika saadaan samasta kaavasta: $T_s = 5738$ s, kun ensin on laskettu isoakselin puolikas kaavalla (7) ja sijoitettu se säteen paikalle. Merkitään t = aika, joka on odotettava ennen polttoja. Voidaan kirjoittaa:

$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_s = \alpha_0 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_h$, missä $\Delta\alpha_1$ ja $\Delta\alpha_2$ ovat sukkulan ja satelliitin kiertymät odotuksen aikana, α_0 satelliitin etumatka alkutilanteesta ja $\Delta\alpha_s$ sekä $\Delta\alpha_h$ siirtymisen aikaiset kiertymät, s sukkulalle ja h hubbelle. Koska kiertymä ympyräradalla $\alpha = vt/r$, voidaan yhtälö kirjoittaa muotoon $v_1 t/r_1 + \pi = 5\pi/18 + v_2 t/r_2 + \frac{1}{2} T_s 2\pi/T_1$, mistä saadaan ratkaistua $t = 10692$ s. Poltto on siis aloitettava hetkellä $T + 10692$ s eli $T + 2$ h 58 min 12 s.

Samalla tavoin voidaan määrittää laskeutumisikkuna, kun tiedetään, että laskeutumispisteen säde = maan säde ja kiertoaika = 24 h.

Tässä esitetyt esimerkit ovat kaikki hyvin yksinkertaistettuja malleja. Siirtymäradat on laskettu ns. Hohmannin siirtymäratoina, mikä on kyllä energian kannalta tehokkain menetelmä, mutta sen suorittaminen kestää puoli kiertoaikaa. Tätä menetelmää käytetäänkin lähinnä hyvin korkealla lentävien satelliittien ratojen korotukseen. Todellisuudessa käytetään ns. nopeaa siirtymärataa, jolloin satelliitti saa ellipsiradan, jonka apogeum on kohdekiertoradan ulkopuolella. Tällöin joudutaan halutulle korkeudelle saavuttaessa suorittamaan pidempi poltto, jotta

saataisiin oikealle radalle. Tämä menetelmä siis kuluttaa paljon polttoainetta, mutta on nopeampi suorittaa. Erityisen tärkeää tämä on esim. vakoilusatelliitteille, joiden on pystyttävä muuttamaan rataansa nopeasti.

Toinen yksinkertaistus on se, että tässä on tarkasteltu tasossa tapahtuvia siirtymiä. Nämä muutavat radan muotoa, mutta eivät sen sijaintia avaruudessa. Kaikki poltot tapahtuvat samassa tasossa. Kuitenkin esim. inkliinaatiota muutettaessa on suoritettava pois tasosta suuntatunut poltto joko nousevan tai laskevan solmun kohdalla.

Jari Varje

Kirjallisuutta

- [1] R. Braeunig; *Rocket and Space Technology*. <http://users.comkey.net/Braeunig/space/>
- [2] H. Karttunen; H. Oja; P. Kröger; M. Poutanen; *Tähtitieteen perusteet*. Ursa, Helsinki 1984.
- [3] E. M. Salonen; *Dynamiikka II*. Yliopistokustannus/Otatieto, Helsinki 1999.



Kuva 4: Avaruussukula Atlantis

NASA

Aritmetiikkaa geometrialla

Kun puhutaan geometrialla tapahtuvasta aritmetiikasta, tarkoitetaan tällöin tietenkin klassista harpilla ja viivaimella tapahtuvaa geometriaa. Jos janojen pituudet ajatellaan lukuina, niillä voidaan laskea geometrisesti. Yhteen- ja vähennyslasku on helppo toteuttaa siirtämällä janoja harpin avulla samalle suoralle. Kerto- ja jakolasku seuraavat yhdenmuotoisuudesta. Niistä on hyvä huomata se, että niitä ei voida laskea tietämättä yksikköjана, vaikka tämä onnistuikin yhteen- ja vähennyslaskussa. Näiden lisäksi voidaan kahden luvun tulon neliöjuuri laskea geometrisesti. Tämä perustuu siihen, että yhdenmuotoisuuden mukaan $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$, josta seuraa, että $ab = h^2$. Yksittäisenkin luvun neliöjuuri voidaan laskea jos tiedetään yksikköjана.

Piirrettävät reaalityluvut

Oletetaan, että on annettu yksikköjана. Reaalitylukua x sanotaan piirrettäväksi, mikäli tästä voidaan äärellisellä määrällä askelia

muodostaa jана, jonka pituus on $|x|$. Edellä esitetyistä laskutoimituksista huomaa, että ainakin kaikki rationaalityluvut ovat piirrettäviä. Tutkitaan, miten piirrettäviä lukuja voisi saada lisää, jos oletetaan, että alussa on käytössä rationaalitykoordinaatit. Ensimmäisessä tapauksessa voidaan piirtää kaksi suoraa, ja katsoa missä ne leikkaavat. Tällöin syntyy ensimmäisen asteen yhtälö, jonka ratkaisemiseen yhteen- vähennys, kerto- ja jakolasku riittävät. Jos tutkitaan ympyrän ja suoran tai kahden ympyrän leikkauspistettä, saadaan toisen asteen yhtälö. Tällöin syntyy toisen asteen yhtälö, ja tarvitaan lisäksi myös neliöjuurta. Kun lopulta ollaan generoitu halutut kaksi pistettä, otetaan näiden etäisyys Pythagoraan lauseella. Tähänkin tarvitaan vain yhteen, kerto- ja jakolaskua. Tästä voidaan huomata, että itse asiassa edellä esitetyt viisi laskutoimitusta riittävät kaikkien piirrettävien lukujen kuvaamiseen. Ei ole kuitenkaan aivan helpoa päätellä lukua katsomalla voidaanko sitä esittää näiden operaatioiden avulla. Esimerkiksi moni-

mutkaisen näköinen luku $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, joka näyttäisi mahdottomalta piirtää, onkin itse asiassa vain toisessa muodossa esitetty kultaisen leikkauksen suhde $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, joka on piirrettävä¹⁾. Juuri tätä kultaista leikkaustahan käytettiin Seepian 3. numerossa säännöllisen viisikulmion muodostamiseen.

Kuntalaajennukset

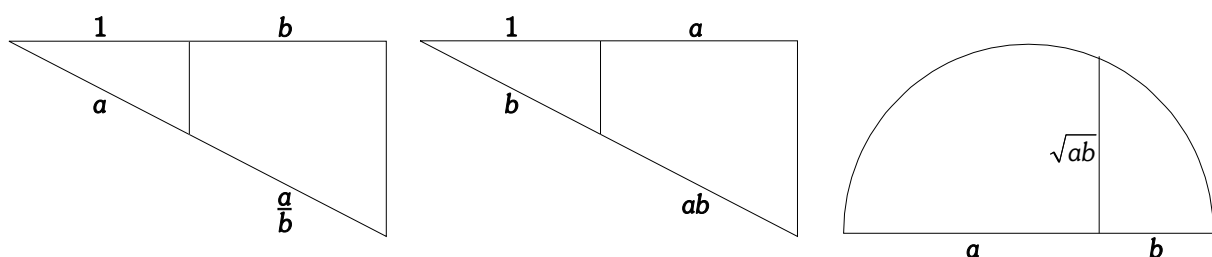
Tämän kaltaisten lukujen käsittelyyn tarvitaan tietynlaisia työkaluja. Kunta on rakenne, jolle pätevät seuraavat, reaalitylukujen aksioomia muistuttavat ehdot:

- (1) Kunnan F kaikille alkioille a ja b on määritelty $a+b$ ja $a \cdot b$ siten, että $a+b \in F$ ja $a \cdot b \in F$
- (2) Kommutatiivisuus: $a+b = b+a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$
- (3) Assosiativisuus: $(a+b)+c = b+(a+c)$ ja $(a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c)$

1) Pascalin kolmion avulla voidaan laskea $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^3$, josta saadaan

$$(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot \sqrt{5}) / 8 = (16 + 8 \cdot \sqrt{5}) / 8 = 2 + \sqrt{5}.$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Kuva 1: Kerto- ja jakolaskun suorittaminen sekä neliöjuuren laskeminen geometrisesti

- (4) Distributiivisuus:
 $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ja
 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- (5) On olemassa alkio (merkitään esimerkiksi 0) siten, että
 $0+x = x+0 = x$ kaikilla x .
- (6) Jokaiselle alkioille x on olemassa käänteisalkio y yhteenlaskun suhteen siten, että $x+y = y+x = 0$.
- (7) On olemassa alkio (merkitään esimerkiksi 1) siten, että
 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ kaikilla x
- (8) Jokaiselle alkioille $x \neq 0$ on olemassa käänteisalkio y kertolaskun suhteen siten, että $x \cdot y = y \cdot x = 1$. Kuntia ovat esimerkiksi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$.

Jos kunta E sisältää kunnan F , sanotaan kuntaa E kunnan F kuntalaajennukseksi. Otetaan esimerkiksi rationaalilukujen kunta, ja lisätään siihen $\sqrt{2}$. Lopputulos on kunta, jonka alkiot ovat muotoa $a+b \cdot \sqrt{2}$, missä $a, b \in \mathbb{Q}$. Tämä täyttää vaadittavat ominaisuudet. Jos otetaan vastaavalla tavalla mahdollisimman pieni kunta, joka sisältää $\sqrt[3]{2}$, saadaan kunta $a+b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4}$, missä $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tähän tarvittiin kolme komponenttia. Näiden komponenttien määrää kutsutaan kuntalaajennuksen asteeksi, ts. ensimmäisen kuntalaajennuksen aste oli 2 ja toisen 3. Piirrettävät reaali-luvut ovat selvästikin kunta, sillä ne täyttävät annetut vaatimukset. Jos lähdetään jostain piirrettävien reaali-lukujen osakunnasta, kuten rationaaliluvuista, ovat plus-, miinus-, kerto-, ja jakolasku määriteltyjä kunnan sisällä. Laajennus voi siis tapahtua ainoastaan neliöjuuren ottamisen yhteydessä. Oletetaan, että laajennus tehdään siten, että halutaan pienin kunta, joka sisältää edellisen kunnan ja luvun $\sqrt{a}$. Tällöin on kaksi vaihtoehtoa. Jos $\sqrt{a}$ kuuluu jo valmiiksi kuntaan, ei laajennusta tapahdu, joten tätä tapausta ei tarvitse ottaa huomioon. Jos se ei kuulu, tarvitaan lisää komponentteja. Jokaista vanhan kun-

nan komponenttia x kohden täytyy uudessa kunnassa olla kaksi komponenttia: x ja $x\sqrt{a}$. Tämän takia laajennuksen aste kaksinkertaistuu aina täsmälleen silloin, kun joudutaan ottamaan ei-neliöllisen luvun neliöjuuri. Lopputulos on se, että jos otetaan pienin mahdollinen rationaalilukujen kuntalaajennus, johon x sisältyy, niin x on piirrettävä jos ja vain jos kuntalaajennuksen aste on kakkosen potenssi. Yksi kuntalaajennusten teorian perustuloksista on se, että jos otetaan pienin kunta, joka sisältää jonkin tietyn jaottoman kolmannen asteen polynomin minkä tahansa juuren, on tämän kunnan laajennuksen aste rationaalilukujen yli 3. Koska 3 ei ole kakkosen potenssi, saadaan sellainen käyttökelpoinen tulos, että jos on olemassa kolmannen asteen yhtälö, jolla ei ole rationaaliratkaisuja, ei sen mitään juurta voida piirtää harpilla ja viivaimella. Lähdettäessä rationaaliluvuista laajennus voi syntyä neliöjuuren ottamisen yhteydessä. Tämä tuplaa kuntalaajennuksen asteen. Lopputulos on se, että jos otetaan pienin mahdollinen rationaalilukujen kuntalaajennus, johon x sisältyy, niin x on piirrettävä jos ja vain jos kuntalaajennuksen aste on kakkosen potenssi. Tästä saadaan sellainen käyttökelpoinen tulos, että jos kolmannen asteen rationaalikertoimisella yhtälöllä ei ole rationaalijuuria, sen mikään juuri ei ole piirrettävä.

Klassiset ongelmat

Matematiikassa klassisiksi ongelmiksi kutsutaan kolmea geometrista konstruktio-ongelmaa: kuution kahdentamista, kulman jakoa kolmeen osaan ja ympyrän neliöintiä. Suhteessa ongelmien ikään onkin yllättävää, että niiden mahdottomaksi todistamiseen tarvitaan niinkin uutta matematiikan haaraa kuin abstraktia algebraa.

Viimenumeron pääkirjoituksessa mainitun legendan mu-

kaan jumalat vaativat, että kuution muotoisen alttarin tilavuus pitäisi kahdentaa. Piti siis muodostaa vanhan alttarin sivua käyttäen uuden, tilavuudeltaan kaksinkertaisen alttarin sivu. Tähän kreikkalaiset eivät kuitenkaan harpilla ja viivaimella tietenkään pystyneet. Olkoon alkuperäisen alttarin sivun pituus yksikköjana. Tällöin yritetään piirtää luku, joka toteuttaisi yhtälön $x^3 - 2 = 0$. Tällä yhtälöllä ei ole rationaalijuuria, sillä mikään mahdollisista vaihtoehdoista $(-2, -1, 1, 2)$ ei toteuta yhtälöä. Sen juuri $\sqrt[3]{2}$ ei siis ole piirrettävä luku.

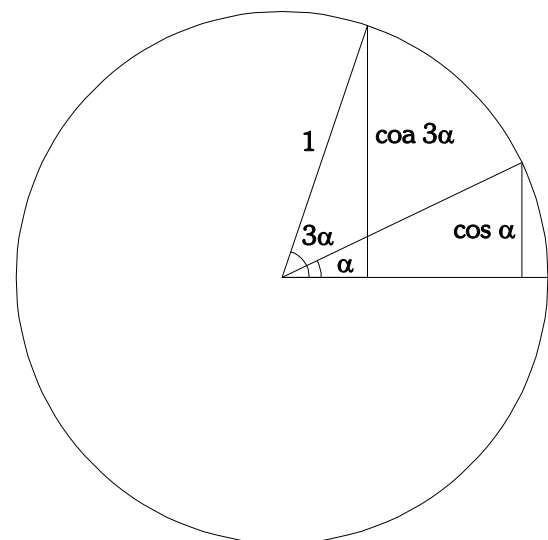
Kulman jako kahteen osaan on helppoa, mutta kulman jakaminen kolmeen osaan on tietyissä tapauksissa mahdotonta. Piirretään annettu kulma 3α yksikköympyrään käsittelyn helpottamiseksi. Kun tiedetään kulma 3α , tiedetään myös $\cos 3\alpha$. Kulma α on piirrettävissä täsmälleen silloin, kun $\cos \alpha$ on piirrettävissä. Nyt saadaan kolmannen asteen yhtälö:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$4x^3 - 3x - t = 0$$

$$(x = \cos \alpha, t = \cos 3\alpha)$$

Jos valitaan $3\alpha = 90^\circ$, saadaan yhtälö $4x^3 - 3x = 0$, jolle löytyy piirrettävä ratkaisu $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Suora



Kuva 3: Kulman jakaminen kolmeen osaan.

kulma voidaan siis jakaa kolmeen osaan. Sen sijaan valinta $3\alpha = 60^\circ$ antaa yhtälön $8x^3 - 6x - 1 = 0$, jolla ei ole rationaalisia juuria. 60° kulmaa ei siis voida jakaa kolmeen yhtä suureen osaan. Tämä vastaesimerkki riittää osoittamaan, että yleistä tapaa jakaa kulma kolmeen yhtä suureen osaan ei ole.

Suorakulmion neliöinti tarkoittaa sitä toimenpidettä, kun muodostetaan neliö, jonka pinta-ala on sama kuin annetun suorakulmion. Tämä voidaan suorittaa melko helposti, koska tällaisen neliön pinta-alahan on sivujen tulojen neliöjuuri. Ympyrän neliöinnissä on vastaavasti muodostettava neliö, jonka pinta-ala on sama kuin annetun ympyrän. Jos annetun ympyrän sädettä käytetään yksiköjänä, on ympyrän pinta-ala π , jolloin neliön sivun pituus on $\sqrt{\pi}$. Jos luku $\sqrt{\pi}$ on piirrettävä, myös luku π on piirrettävä. Tällöin kunta, joka sisältää luvun π on n asteen kuntalaajennus. Tällöin kuitenkin olisi olemassa rationaaliker-toiminen n asteen polynomi, jonka nollakohta π olisi. Tämä on ristiriita, sillä π on transsendenttinen luku, mikä tarkoittaa sitä, että ei ole olemassa mitään rationaalilukukertoimista polynomia, jonka nollakohta π olisi. Tämä voidaan ilmaista, myös siten, että transsendenttisen luvun sisältävän kunnan laajennuksen aste on ∞ , joka ei ole kakkosen potenssi.

Piirrettävät monikulmiot

Samalla tavalla kuin kulman jaossa kolmeen osaan, säännöllisten monikulmioiden piirtäminen on mahdollista tietyissä erikoistapauksissa, mutta yleisessä tapauksessa se ei onnistu. Tässä tapauksessa käsitteeseen tarvitaan lisäksi Galois'n-teoriaa²⁾, joka tunnetaan parhaiten siitä, että sillä voidaan osoittaa se, että yli neljän

2) Evariste Galois (1811 – 1832)

asteen yhtälöille ei ole yleistä ratkaisukaavaa juurten avulla. Monikulmion konstruointiin vaaditaan hieman samaan tapaan kuin kulman jaossa kolmeen osaan luvun $\cos \frac{2\pi}{n}$ konstruointia, ja Galois'n-teorian avulla voidaan osoittaa, että pienimmän kunnan, joka sisältää $\cos \frac{2\pi}{n}$ laajennuksen aste on $\frac{\phi(n)}{2}$, jossa $\phi(n)$ on Eulerin ϕ -funktio. $\phi(n)$ merkitsee niiden lukujen määrää, jotka ovat pienempiä kuin n , ja niillä ei ole yhteisiä tekijöitä n kanssa. Otetaan esimerkiksi $\phi(15)$. Luvuilla 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 ja 14 ei ole yhteisiä tekijöitä 15 kanssa, siis $\phi(15) = 8$. Kuten aikaisemminkin, laajennuksen asteen on oltava kakkosen potenssi. Tässä tapauksessa siis säännöllinen n -kulmio ($n \geq 3$) on piirrettävä, mikäli $\frac{\phi(n)}{2}$ on kakkosen potenssi. Tämän voi ilmaista myös toisella tavalla siten, että n -kulmio on piirrettävä, jos sen kakkosesta poikkeavat tekijät ovat Fermat'n alkulu-

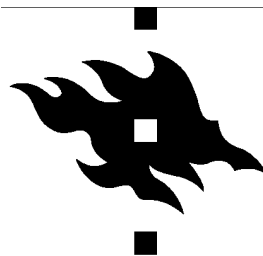
kuja (kuitenkin eri alkulukuja). Fermat'n alkuluvuksi kutsutaan alkulukua muotoa $2^{2^n} + 1$. Näin ensimmäiset ei-piirrettävät monikulmiot ovat 7-, 9-, 11-, 13- ja 14-kulmiot. Kun n kasvaa, piirrettävien n -kulmioiden osuus pienenee. Piirrettäviä monikulmioita on kuitenkin hyvin isoilla n arvoilla, kuten esimerkiksi 65537-kulmio (65537 on Fermat'n alkuluku). Tällainen puhutaan algebrallinen lähestymistapa ei kuitenkaan kerro itse konstruoinnin tapahtumisesta mitään. Tällaisessa tapauksessa tieto, että 65537-kulmio voidaan konstruoida on varmasti hyödyllisempi kuin tarkka selitys siitä miten se tapahtuisi.

Veli Peltola

Kirjallisuutta

- [1] Pogorelov, A.; Geometry. Mir Publishers 1987
- [2] Hanneken, C. B.; Introduction to Abstract Algebra. Dickenson Publishing Company, Inc., Belmont, California 1968

Oletko tullut ajatelleeksi, että
40%
 korkeakoulujen aloituspaikoista
 sijaitsee aloilla, joissa tarvitaan
 kemian osaamista?



Helsingin yliopiston kemian laitos
<http://www.chemistry.helsinki.fi>

LATINA

elävä kuollut kieli

Kutakuinkin keskellä Apeniinien saappaanmuotoista niemi-maata kohoavat Tiberjoen varren seitsemällä kukkulalla modernin eurooppalaisen suurkaupungin terräs- ja betonikolossien varjossa länsimaisen sivistyksen kehdon samaloituneet rauniot. Vaikka meidän päiviemme Roomaa kansoittaakin keisarin alamaisten sijaan Maranellon punaisen oriin nimeen vannovien tifosojen riehakas joukko, Augustuksen imperiumi on kahden vuosituhannenkin jälkeen voimissaan - aikamme gladiaattoreita formulakuskeja myöten. "Jo muinaisten roomalaisten" edesottamuksiin vetoaminen lienee kuuluneimpia kliseitämme, jota - Jupiterin kiitos - kuulee tätä nykyä lausuttavan enää lähinnä vitsinä. Fraasissa piilee kuitenkin totuutensa: niin aakkostomme kuin oikeuslaitoksemme juuret ulottuvat lkuisen kaupungin aamunkoittoon, ja onpa kirkkommekin monituiset perinteet omaksuttu pitkälti antiikin mystiikasta. Kenties väkevimminkin muinainen Rooma elää nykypäivänä kuitenkin latinalaisessa kulttuurissa, joka värittää likipitään miljar-

din ihmisen arkea kolmella mantee-reella.

Latina, aikansa lingua franca, aloitti matkansa maailmankieleksi sangen vaatimattomista lähtökohdista. Latiumin piskuisen maakunnan kunnianhimoinen asujaimisto kamppaili kuitenkin historian alkuhämärissä ensin itsensä vapaaksi pohjoisnaapuriensa etruskien ikeen alta ja ryhtyi sitten itse menestyksekkäästi harjoittamaan imperialistista ulkopoliittikkaa. "Divide et impera!" -doktriinin hengessä Rooman valtakunta levitti lonkeronsa Tiberin rannoilta koko tunnettuun maailmaan hajottaen vastarinnan ylivoimaisella sotakoneistollaan ja halliten valloittamiaan provinsseja rautaisin ottein. Palatinus-kukkulalta johdettiin legioonien voimin keisarikuntaa, joka ulottui laajimmillaan Karthagosta Kaledoniaan ja Lusitaniasta Lähi-itään. Kansalaiset rajaseutujen barbaareja myöten pantiin puhumaan latinaa, ja ajanlaskumme alkaessa pienen Latiumin murre oli saavuttanut niin Välimeren ääret kuin kaukaisen pohjoisen. Vastavaan ei sittemmin ole kyennyt kuin muuan germaanissukuinen

kieli, joka ponnisti erään saarivaltakunnan eteläosista siirtomaasotien tuoksinassa todelliseksi joka maailmankolkan yleiskieleksi.

Latina, Euroopan äidinkieli, paiskautui keskiajan syövereihin isänmaansa menettäneenä - imperiumi oli vuosisatojen saatossa hajonnut omaan rappioonsa, ja olipa itse lkuinen kaupunkikin vandaalien visiitin jäljiltä raunioina. Latinan kultaisin kausi oli kuopattu jo Caesarin ja Ciceron mukana, mutta kansainvaellusten jälkeisessä taantumuksen feodaali-Euroopassa kielenhuolto kärsi lopullisen arvonmenetyksen, ja kielen ränsistyminen ryöstäytyi valloilleen. Kansan suussa muovautunutta vulgäärilatinaa meidän on kiittäminen selaisista nyttemmin kansalliskieliksi profiloituneista provinssimurteista kuin italiasta, espanjasta, portugalista, ranskasta ja romaniasta, joiden puristuksessa baskin kaltaiset todelliset kielireliikit ovat päätyneet taistelemaan elintilasta jopa terroristien voimin.

Etelä-Euroopan viinivalttioiden ohella nämä latinan perilliset saavuttivat tukevan jalansijan eten-

kin Uudella mantereella, jossa löytöretkeilyn suurvallat Espanja ja Portugali pitivät komentoa vuosisatojen ajan. Rio Grandelta Tuli-maahan ulottuva Latinalainen Amerikka onkin paitsi paavin myös Rooman perinnön vankkaa tukialuetta, ja kielten kirjoa täydentää itsenäisyyttäkin tavoitteleva Québecin osavaltio Kanadan ranskankielisessä kaakkoisosassa. Nämä romaanisten kielten kolme suurta ovat edustettuina - ainakin virastoissa - myös ympäri Afrikan valtavaa mannerta aivan muinaisen siirtomaajaon mukaisesti. Latinalaisesta Afrikasta ei kuitenkaan liene koskaan edes yritetty puhua - syvälle juurtuneet heimo-perinteet ovat uhmanneet eurooppalaista kulttuuri-imperialismia Amerikan alkuperäisasutusta menestyksekkäämmin, eivätkä sitä paitsi siirtolaiset ole koskaan saavuttaneet enemmistöä minkään afrikkalaisprotektoraattinsa asujaimistosta.

Latinan kieli, sellaisena kuin klassillisten kielten professorit suostuvat sen vielä isommitta mukinoitta tunnistamaan, säilyi kuitenkin läpi keskiajan norsunluutorniensa kätköissä katolisen kirkon piirissä. Katedraaleissa saarnattiin jääräpäisesti latinaksi ummikkoina toimitusta seuranneen rahvaan yrittäessä kätkeä haukotuksensa, syntisimpien kuorsatessa äänekkäästi ja vielä uskaliaampien syljeskellessä parvelta permannon väen niskaan - kaunis traditio, josta vasta herra Luther uskonpuhdistajakollegoineen teki lopun. Vaikka roomalaiskatolisen kirkon ruohonjuuritaso on sittemmin alkanut puhua kansalle sen omaa barbaarista kieltä, latinistit voinevat vastedeskin turvallisin mielin luottaa Vatikaaniin latinan viimeisenä, vankkumattomana linnakkeena - iskettäköön Tähtilippu Kuun kamaraan, kärytköön karpaasi kotikisoissaan ja jäätyköön Helveti syvimpiä hornankattiloitaan myöten, mutta joulupäivänä televisio-

sa paavi puhuu varmasti latinaa.

Keskiajan taittuessa renessanssiksi klassisista kielistä klassisiin avasi menestystarinansa viimeisen suuren luvun uuteen kultakautensa vapautuneen tieteen parissa. Vanhastaan sivistyneistön kielellä latina oli ilmeinen valinta myös tieteellisten julkaisujen kieleksi - esittipä Isaac Newtonkin aikansa maailmankuvan pirstoneen paino-voimateorian teoksessaan nimeltä *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, kavereiden kesken pelkkä *Principia*. Leijonanosa sellaisista perusluonteisista löydöksistä kuin alkuaineet ja taivaankappaleet oli ennätetty nimetä latinalaisittain, ennen kuin englantil alkoi toissa vuosisadalla vallata alaa luonnontieteiden terminologiassa. Silti esimerkiksi Amazonasin siimeksessä havaittu uusi nuolimyrkkysammakkolaji saa yhä universaalin nimensä perinteitä kunnioittaen latinaksi.

Vaikka klassinen latina elävänä puhekielenä haavoittuikin kuolettavasti jo barbaarien rynnäkössä Rooman forumille 400-luvulla ja menehtyi viimeistään keskiajan kynnyksellä omaa rappeutuneisuuttaan, on tämä todellinen kielten klassikko välttynyt lopulliselta kuljetukselta krematorioon kunniakkaan elinkaarensa ja eritoten postuumien mainetekojensa ansiosta. Keskellä uutta revalvaatiotaan kukoistava latina on esimerkillinen elävä kuollut kieli - täsmennettäköön, etten tarkoita ilmaisulla B-kauhuelokuvista tuttua zombieta, joka kiertää ilmeettömänä tienoota kuunvalossa ihmisaivoja illalliseksi metsästä-mässä. Latina nimittäin elää väkevästi - uuden maailman kulttuuriperintöä Grimmin saduista Elvikseen julkaistaan tuon tuosta ikuiselle kielelle käännettynä, ja onpa edelläkävijä Suomen Yleisradio jo vuosia toimittanut viikoittaista latinankielistä radiouutislähetystä, vain modernin latinismin pintaa raapaistakseni - kuolleenakin, il-

man ainuttakaan äidinkielistä puhujaa; melkoinen saavutus yli 2700-vuotiaalta veteraanilta!

Säkenöivästä älystään tunnettu, useasti lainattu Yhdysvaltain entinen varapresidentti Dan Quayle pahoitteli kerran Latinalaisesta Amerikasta palattuaan, ettei ollut juurikaan päässyt selville paikallisväestön puheesta - hän kun ei ollut millään tavoin panostanut kouluaikoinaan latinan opintoihin. Vuosikymmenen takainen republikaani-ikoni osui tässä pelottavan liki totuutta: latinan taitaja ymmärtänee hyvinkin espanjaa tai portugalia kuin suomalainen sava-laista, yksityiskohdat saattavat jäädä hämärän peittoon, mutta viesti tulee kyllä perille. Edesmenneen latinan perikunta, romaaninen klaani, on maailmamme kielten voimasuhteissa sangen vahvoilla, eikä peruna niin kauas puusta putoa, että latinan opiskelu jäisi täysin pölyttyneille keisareille ja sivistyssanoille uhratuksi ajaksi.

Kuolleeksijulistamisen ja elävältä hautaamisen sijaan latina voitaneenkin päästää ansaituille eläkepäiville sellaisten maailmankielten legendojen kuin volapükkin ja esperanton seuraan - näistä jälkimmäisestä tosin kuulemme vielä, mikäli maailmassa on tippaakaan oikeudenmukaisuutta. Kaik-kia yhdistää aktiivinen, globaali harrastajayhteisö, johon päästäkseen on opittava kieli. Porkkanaksi latinaan syventymiseen voi värikkään muinaishistorian, sivistyssanojen etymologian ymmärtämisen ja elitistisen kuppikunnan jäsenyyden ohella tarjota ilmeisintä: kielitaitoa. Ennen latinan opintojani en minäkään kuvitellut osaavani sanaakaan retoromaniaa - enää en menisi vannomaan.

Janne L. Käki

Kirjallisuutta

- [1] Taskutietojätti, Gummerus 1985. hakusanat: latina; Newton, Isaac
- [2] Former USA VP Dan Quayle quotes: <http://www.xmission.com/~mwalker/DQ/>
- [5] <http://www.spiny.com/pope/>

Julian joukot

fraktaaleja kompleksitasolla

Luonnossa esiintyy joka puolella äärimmäisen monimutkaisia ja kauniita muotoja, jotka jatkuvasti toistavat itseään eri mittakaavoissa. Niitä löytyy niin vuorista ja meren aalloista, kuin elävästä luonnostakin, kuten puiden oksistoista ja sammalkasvustoista. Vielä ihmeellisempää on, että yksi puhtaasti matemaattinen lauseke saattaa sisältää aivan yhtä monimutkaisia ja kauniita rakenteita. Rationaalifunktioiden muodostamien dynaamisten systeemien tarkastelulla kompleksitasolla ei vaikeuta olekaan mitään tekemistä taiteen kanssa, mutta sen jälkeen, kun ranskalainen matemaatikko Benoit B. Mandelbrot teki tällaiset systeemit tunnetuiksi, on niiden kuvia esiintynyt enemmän taiteilijoiden kuin matemaatikoiden töissä. Näiden kuvien tuottamiseen käytettävä sääntö on niin yksinkertainen, että kuka tahansa pystyy tietokoneellaan tuottamaan niitä. Ne ovat kuitenkin niin monimutkaisia, että maailmassa tuskin on kehtaan, joka pystyisi todella ymmärtämään niitä. Siksi on kiehtovaa tarkastella lähemmin näiden kuvien taustalla olevaa matematiikkaa.

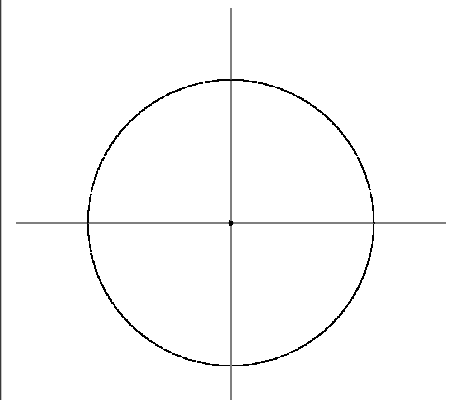
Dynaaminen systeemi

Dynaamisella systeemillä tarkoitetaan muuttuvaa matemaattista tai fysikaalista systeemiä, jos-

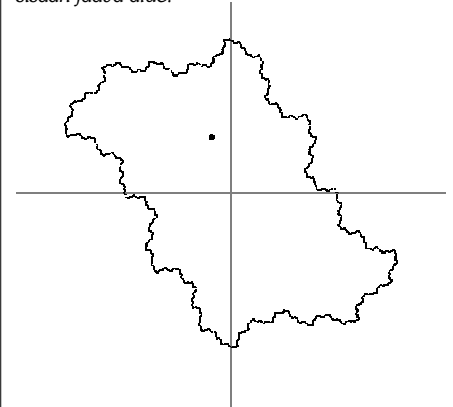
sa jokainen tila riippuu sitä edeltävästä tilasta. Jos systeemillä on erilisiä peräkkäisiä tiloja, sitä kutsutaan diskreetiksi. Tällöin systeemiä voidaan usein kuvata kaavalla, joka kertoo, miten edellisestä tilasta saadaan seuraava. Systeemi voi olla myös jatkuva, jolloin sitä kuvataan yleensä differentiaaliyhtälöllä. Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa, jolle pätee $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2$. Kun merkitään lukujonon ensimmäistä jäsentä z_0 :lla, saadaan jono $z_0, z_1 = z_0^2, z_2 = z_0^4, z_3 = z_0^8, \dots$. Lukujonon käyttäytyminen riippuu valitusta alkuarvosta z_0 . Jos $|z_0| < 1$, jono lähestyy nollaa kun n lähestyy ääretöntä. Tätä merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Jos taas $|z_0| > 1$, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, ja jos $|z_0| = 1$, niin $|z_n| = 1$ kaikille n :n arvoille. Reaaliluvuille tällainen käyttäytyminen on helppoa ymmärtää, mutta sama pätee myös kompleksiluvuille. Alkupisteet, joiden pohjalta tuotetut lukujonot eivät lähene nollaa eivätkä ääretöntä muodostavat siis kompleksitasolle origokeskeisen yksikköympyrän. Tätä pistejoukkoa kutsutaan funktion f Julian joukoksi. Merkitsemme sitä $J(f)$. Nimi on annettu ranskalaisen matemaatikon Gaston Julian (1893–1978) mukaan, joka määritteli joukon 1918 [6]. Julian joukko voidaan muodostaa mille tahansa funktiolle, jonka määrittelyjoukko on sama kuin sen arvojoukko. Tunnetuin esimerkki ovat Julian joukot

funktiolle muotoa $p_c(z) = z^2 + c$, jonka erikoistapausta $c=0$ äsken tarkastelimme. Julian työtoverina oli Pierre Fatou, jonka mukaan niiden pisteiden joukkoa, jotka eivät kuulu Julian joukkoon, kutsutaan Fatoun joukoksi.

Tässä artikkelissa käsitellään lähinnä muotoa $p_c(z) = z^2 + c$ olevien funktioiden Julian joukko-



Kuva 1: Julian joukot funktioille $p_0(z) = z^2$ (yllä) ja $p_{0.5i}(z) = z^2 + 0.5i$ (alla). Kummankin funktion attraktiivinen kiinteä piste on merkitty. Sen attraktion altaaseen kuuluu Julian joukon sisään jäävä alue.



ja. Jatkossa käytämme tätä merkin-
tää (p_c) näille funktioille. Edellises-
sä esimerkissä tarkasteltiin siis
funktioita p_0 .

Muutetaan nyt äskeistä esi-
merkkiä siten, että lisätään z :aan
joka välissä jokin pieni vakio esim.
 $c=0,5i$. Nyt pienet z :n arvot eivät
enää läheneäkään nollaa, vaan pis-
tettä, jonka likiarvo on
 $-0,136+0,393i$. (Tämä piste on yh-
tälön $z=z^2+0,5i$ reaaliakselin ylä-
puolella oleva ratkaisu) Julian
joukkokaan ei ole enää ympyrä,
vaan monimutkainen, itseään tois-
tava fraktaalinen käyrä. (ks. kuva
1)

Äskeisissä esimerkeissä käy-
tetyt kaltaista laskutoimituksen
toistoa kutsutaan iteroinniksi.
Funktion f :n:nelle iteraatiolle on
käytössä merkintätapa

$$f^n(x) = f(f(\dots f(x)\dots)),$$

missä f esiintyy n kertaa. Merkin-
nällä ei siis ole mitään tekemistä
potenssiin korottamisen kanssa.
 f :n käänteisfunktioita merkitään
käyttäen funktiolaskimista tuttua
merkintää f^{-1} . Näin voidaan laajen-
taa iteraation käsite kaikille koko-
naisluville, kun määritellään, että
 $f^{-n} = (f^{-1})^n$ ja että $f^0(x) = x$ kaikille
funktioille f . Iteraatioluvuilla voi-
daan nyt laskea kuten potensseil-
la: $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ ja $(f^n)^m = f^{nm}$ riip-
pumatta siitä, ovatko m ja n nega-
tiivisia vai positiivisia.

Kompleksifunktioiden ite-
roinnin yhteydessä puhutaan
usein kiertoradoista. Kompleksi-
tason pisteen z positiivisella kierto-
radalla tarkoitetaan niiden pistei-
den joukkoa, jotka tulevat vastaan
jotakin funktiota iteroitaessa. Mer-
kitsemme positiivista kiertorataa:

$$O^+(z) = \{f(z), f^2(z), f^3(z), \dots\}.$$

Negatiiviseksi kiertoradaksi kutsu-
taan vastaavasti joukkoa:

$$O^-(z) = \{f^{-1}(z), f^{-2}(z), f^{-3}(z), \dots\}.$$

Negatiivisten kiertoratojen yh-
teydessä on kuitenkin muistettava,
että jos funktion aste on suurempi
kuin yksi, on sen käänteisfunktio-

Kompleksiluvut lyhyesti

Perinteisessä matematiikassa yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua. Voimme kuiten-
kin kuvitella sille ratkaisun, vaikka sitä ei todellisuudessa olisikaan olemassa. Tätä ratkai-
sua kutsutaan imaginääriyksiköksi, ja sitä merkitään i :llä. Yhtälön toinen ratkaisu on $-i$.
Imaginääriyksikköä voidaan käsitellä kuten mitä tahansa lukua. Näin voidaan laskea
esim. että $\sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{2}i$. Lukuja, joissa i on tekijänä kutsutaan imaginääriluvuik-
si. Imaginäärilukuja ja reaaliukuja voidaan myös laskea yhteen, mutta tällaiset luvut täy-
tyy kuitenkin aina esittää kahdessa osassa. Lukuja, joissa on sekä reaali- että imaginää-
riosa kutsutaan kompleksiluvuiksi. Kompleksilukuja ovat esimerkiksi $2-7,4i$ ja $5,3+i$
sekä $\sqrt{17}+1+2\pi^2i$.

Kompleksiluvuillakin voidaan laskea, kuten kaikilla luvuilla. Seuraavat peruslas-
kusäännöt on helppo johtaa:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = ac + iad + ibc + bdi^2 = ac - bd + i(ad+bc)$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Kerto- ja jakolaskussa käytetään hyväksi tietoa, että $i^2 = -1$.

Nykyään on yleisesti käytössä
tapa esittää kompleksiluvut pisteinä ns.
kompleksitasolla, jossa vaakasuuntaan
kulkee reaali- ja pystysuuntaan imaginää-
riakseli. Oikeanpuoleisessa kuvassa nä-
kyy luku $2,5 + 3i$ kompleksitasolle piirret-
tynä. Kompleksitasolle käytetään tunnus-
ta $\mathbb{C}$.

Edellä kompleksiluvut on esitetty
kahtena komponenttina. Kompleksiluku
on aina yksikäsitteisesti määritetty, kun
sen reaali- ja imaginääriosat on määritel-
ty. Tämän lisäksi käytössä on toinenkin
tapa määritellä kompleksiluku: itseisar-
vonsa ja argumenttinsa avulla. Kompleksi-
luvun itseisarvolla tarkoitetaan samaa,
kuin reaali-luvuillakin, eli etäisyyttä origos-
ta. Kun kompleksiluku on esitetty kom-
ponenttimuodossa, sen itseisarvon laskemiseksi tarvitaan Pythagoraan lausetta:

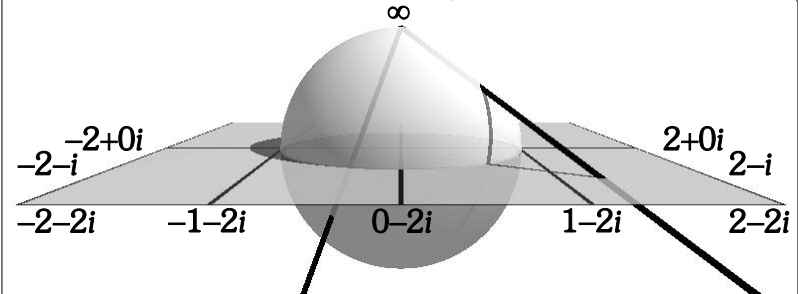
$$|a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Kuvaan merkityn kompleksiluvun itseisarvo on siis } |2,5+3i| = \frac{\sqrt{61}}{2}.$$

Argumentilla tarkoitetaan vastapäivään kiertuvaa kulmaa, jonka origosta lukuun piirretty jana
muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa. Kuvassa argumentti on merkitty θ :lla. Argu-
mentin laskemiseksi komponenttimuodosta tarvitaan trigonometriaa:
 $\arg(a+ib) = \arctan(b/a)$. Argumentti ilmoitetaan yleensä radiaaneina. Myös itseisarvo ja
argumentti määrittelevät kompleksiluvun yksikäsitteisesti. Kompleksiluku z , jonka it-
seisarvo on r ja argumentti θ on:

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$$

Jälkimmäinen merkintätapa saattaa näyttää erikoiselta, mutta se pitää paikkaan-
sa. Voidaan tosiaan osoittaa, että yhtälön $z = e^{i\theta}$ ratkaisu on kompleksiluku, jonka itseisar-
vo on yksi ja argumentti θ . Tämä on kaikkein tavallisin tapa ilmaista kompleksiluku po-
laarisessa muodossa. Tästä erikoistapauksena on Leonhard Eulerin (1707–1783) esittä-
mä "matematiikan kaunein kaava": $e^{i\pi} = -1$, jossa yhdistyvät hienosti kolme matemati-
kassa ehkä kaikkein tärkeintä lukua.

Reaali-lukujen yhteydessä puhutaan positiivisesta ja negatiivisesta äärettömästä.
Kompleksitasolla on kuitenkin vain yksi ääretön. Tätä havainnollistaa tapa esittää kom-
pleksitaso ns. Riemannin pallona. Alla olevassa kuvassa on esitetty projektiotason ja pal-
lon välillä. Pallon "pohjoisnavalla" sijaitsee ääretön, ja "etelänavalla" luku 0. Muut pis-
teet projisoidaan pallolle piirtämällä suora äärettömän, ja tasolla olevan pisteen kautta.
Suora leikkaa pallon projektiopisteessä. Tällöin argumentti vastaa itse asiassa pituuspii-
riä. "Päiväntasaajalle" kuvautuu origokeskeinen yksikköympyrä. Kompleksitasoa, jossa
ääretön on mukana kutsutaan laajennetuksi kompleksitasoksi, ja merkitään $\bar{\mathbb{C}}$.



la useita arvoja. Tällöin negatiivinen kiertorata koostuu kaikista mahdollisista käänteisfunktioiden arvoista. Ts. pisteen z negatiiviseen kiertorataan kuuluvat kaikki ne pisteet, joiden positiiviseen kiertorataan z kuuluu.

Jaksolliset pisteet

Kuten edellä olevassa esimerkissä havaittiin, pisteen 0 positiivinen kiertorata funktiota p_0 iteroitaessa pysyy nollassa, sillä $p_0(0)=0$. Yleisesti jos $f(z_0)=z_0$ jollekin funktiolle $f(z)$, sanotaan z_0 :aa f :n kiinteäksi pisteeksi. Joillakin funktioilla on myös ns. jaksollisia pisteitä, eli pisteitä joille

$$z_0 = f^n(z_0) \quad (1)$$

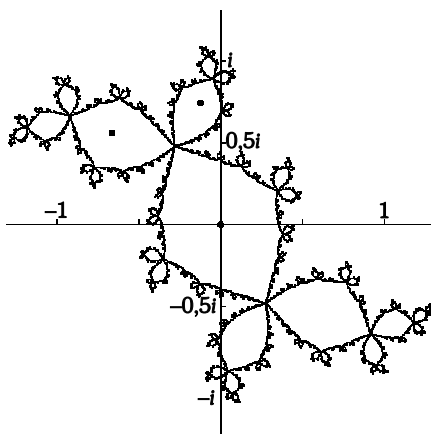
jollekin positiiviselle kokonaisluvulle n . Tällöin voidaan myös sanoa pisteen positiivisen kiertoradan olevan jaksollinen. Pienintä n :n arvoa, joilla (1) toteutuu kutsutaan kiertoradan jaksoksi. Kaavasta (1) seuraa myös, että

$$f^k(z_0) = f^{k+n}(z_0) \quad (2)$$

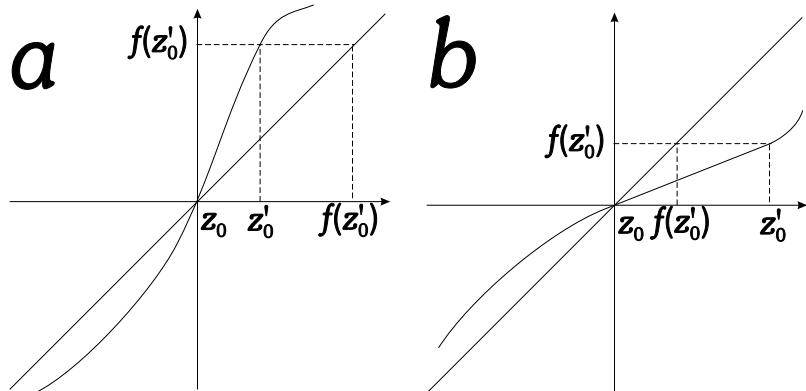
Kaikkille positiivisille kokonaisluvuille k .

Esimerkiksi kun c toteuttaa yhtälön $(c^2 + c)^2 + c = 0$, eli kun $c \approx -0,122561 + 0,744861i$, niin piste 0 kuuluu jaksolliseen sykliin, jonka jakso on 3:

$$p_c^0(0) = 0$$



Kuva 3: Julian joukko funktiolle $p_c(z) = z^2 - 0,122561 + 0,744861i$. Jaksollinen kiertorata on merkitty mustilla pisteillä. Julian joukon sisäpuolelle jäävä alue muodostaa sen attraktion altaan.



Kuva 2: Funktion derivaatan vaikutus kiinteän pisteen (z_0) luonteeseen. Ja sen lähellä sijaitsevan pisteen (z'_0) positiiviseen kiertorataan.

a: Jos $|f'(z_0)| > 1$, niin $f(z'_0)$ sijaitsee kauempana z_0 :sta kuin z'_0 .

b: Jos taas $|f'(z_0)| < 1$, niin $f(z'_0)$ sijaitsee lähempänä z_0 :aa kuin z'_0 .

Huomaa, että kuvaajien molemmat akselit ovat reaaliakseleita. Vaaka-akseli kuvaa funktion argumenttia ja pystyakseli sen arvoa.

$$p_c^1(0) \approx -0,122561 + 0,744861i$$

$$p_c^2(0) \approx -0,662359 + 0,562280i$$

$$p_c^3(0) = 0$$

$$p_c^4(0) \approx -0,122561 + 0,744861i$$

$$p_c^5(0) \approx -0,662359 + 0,562280i$$

jne...

Tämä sykli on merkitty kuvan 3.

Pisteitä, jotka eivät ole jaksollisia, mutta joiden kiertoradat päätyvät jaksolliseen silmukkaan äärellisen iteraatiomäärän jälkeen kutsutaan esijaksollisiksi. Tällainen on edellisen esimerkin funktiolle esimerkiksi piste $0,122561 - 0,744861i$. Se on c :n arvon vastaluku, joten sen neliö on sama kuin c :n. Jo ensimmäisellä iteraatiolla päästään siis edellä esitettyyn sykliin. Lisää tällaisia pisteitä löydetään funktion käänteisfunktioita käyttämällä.

Attraktiiviset ja repulsiiviset pisteet

Jos iteroitava funktio on jatkuva ja derivoituva, on luonnollista, että sen kiinteiden pisteiden lähettävillä sijaitsevat pisteet käyttäytyvät lähes kiinteän pisteen tavoin. Se, miten kiertorata poikkeaa kiinteän pisteen kiertoradasta, riippuu kyseisen kiinteän pisteen luontees-

ta. Joissakin tapauksissa läheltä valitun pisteen kiertorata lähenee pikkuhiljaa kiinteää pistettä, eli mitä pidemmälle iteroidaan, sitä lähemmäksi kiertoradan pisteet tulevat kiinteää pistettä. Toisissa tapauksissa kiertorata taas etääntyy kiinteästä pisteestä. Kiinteitä pisteitä, joiden ympärillä kiertoradat käyttäytyvät ensin mainitulla tavalla kutsutaan attraktiivisiksi, ja jälkimmäisellä tavalla käyttäytyviä repulsiivisiksi. Jos kiertorata ei etäänny, eikä lähesty kiinteää pistettä, vaan pysyy suhteellisesti ottaen samalla etäisyydellä, sanotaan pisteen olevan neutraali. Pisteen luonteen tarkka määrittäminen edellyttää iteroitavan funktion derivaatan laskemista kyseisessä pisteessä.

Kompleksifunktio voidaan derivoida samoin menetelmin kuin reaali-funktio. Sen derivaatta on myös kompleksifunktio, jonka reaali- ja imaginääriosia vastaavat alkuperäisen funktion reaali- ja imaginääriosien muutosnopeuksia kussakin pisteessä.

Kiinteät pisteet (z_0) luokitellaan yleensä funktion derivaatan¹⁾ ($\lambda = f'(z_0)$) perusteella seuraavasti:

$$|\lambda| = 0 \quad \text{superattraktiivinen}$$

$$0 < |\lambda| < 1 \quad \text{attraktiivinen}$$

$$|\lambda| = 1 \quad \text{neutraali}$$

$$|\lambda| > 1 \quad \text{repulsiivinen}$$

1) Funktion derivaatta pisteessä z_0 tarkoittaa sen kulmakeroa tuossa pisteessä. Sitä merkitään $f'(z_0)$.

Kuva 2 havainnollistaa derivaatan merkitystä. Myös useamman pisteen syklille voidaan määritellä vastaava ominaisuus. Tällöin tarkastellaan vastaavasti derivaattaa $\lambda = (f^k)'(z_0)$, missä k on syklin jakso. Esimerkiksi attraktiivisen syklin ympärillä olevien pisteiden kiertoradat lähenevät sykliä siten, että joka k :s piste lähenee jotakin tiettyä syklin pistettä ts. ne kiertoradan pisteet z_n , joille $n \bmod k$ on sama, lähenevät samaa syklin pistettä.

Attraktiivisille sykleille ja kiinteille pisteille voidaan määritellä ns. attraktion allas. Sillä tarkoitetaan kaikkien niiden pisteiden joukkoa, joiden kiertoradat lähenevät ko. kiinteää pistettä tai sykliä, kun iteraatioluku lähestyy ääretöntä. Merkitsemme pisteen z_0 attraktion allasta $A_f(z_0)$. Esimerkiksi kuvassa 1 kiinteän pisteen attraktion allas on Julian joukon sisään jäävä alue.

Alussa tarkastellussa esimerkissä Julian joukko oli siis äärettömän attraktion altaan reuna:

$$J(f) = \partial A_f(\infty), \quad (2)$$

missä ∂ tarkoittaa reunaviivaa. Tätä määritelmää voidaan kuitenkin käyttää vain funktioille, joille ∞ on kiinteä piste. Se voidaan yleistää seuraavasti:

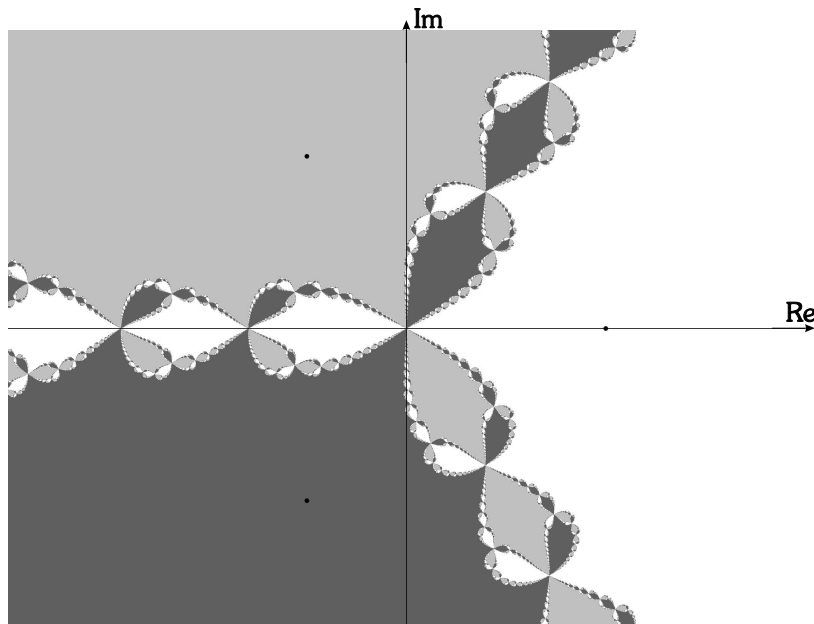
$$J(f) = \partial A_f(z_0), \quad (3)$$

missä z_0 on jokin attraktiivinen kiinteä piste.

Kaavan (3) määrittelemä joukko on todellakin riippumaton kiinteän pisteen z_0 valinnasta. Voidaan todellakin osoittaa, että mikäli funktiolla on useita kiinteitä pisteitä, niiden kaikkien attraktion altailla on yhteinen reuna. Tällainen Julian joukko on esitetty kuvassa 4.

Koska attraktion altaaseen ei luonnollisesti voi kuulua attraktorin lisäksi muita kiinteitä tai jak-

2) Tämä ei ole Julian joukon alkuperäinen määritelmä, vaikka se lieneekin yleisimmin käytetty. Alkuperäinen määritelmä löytyy esim. lähteistä [1] tai [14]. Se voidaan osoittaa tässä esitetyn kanssa yhtäpitäväksi.



Kuva 4: Julian joukko funktiolle $f(z) = z - (z^3 - 1)/(3z^2)$. Kuvaan on merkitty kolme attraktiivista kiinteää pistettä 1 ja $-0,5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, sekä niiden attraktion altaat ei harmaan sävyillä. Kaikilla attraktion altailla on yhteinen reunaviiva, joka on funktion f Julian joukko.

sollisia pisteitä, seuraa tästä luonnollisesti, että kaikki repulsiiviset kiinteät pisteet kuuluvat Julian joukkoon. Julian joukko voidaan myös määritellä repulsiivisten pisteiden avulla:

Funktion f Julian joukko on f :n kaikkien repulsiivisten periodisten pisteiden muodostaman joukon sulkeuma.²⁾

Joukon S sulkeumalla tarkoitetaan pienintä suljettua joukkoa, joka sisältää joukon S . Sitä merkitään $\bar{S}$. Sulkeuma voidaan määritellä myös siten, että se on joukon ja sen reunalla sijaitsevien pisteiden yhdiste. Siihen kuuluvat siis kaikki pisteet, jotka joko kuuluvat alkuperäiseen joukkoon S , tai joille on mielivaltaisen läheltä löydettävissä piste, joka kuuluu joukkoon S . Esimerkiksi reaalilukujen joukko on rationaalilukujen joukon sulkeuma. Itse asiassa myös laajennettu kompleksitaso $\bar{\mathbb{C}}$ on kompleksitason $\mathbb{C}$ sulkeuma.

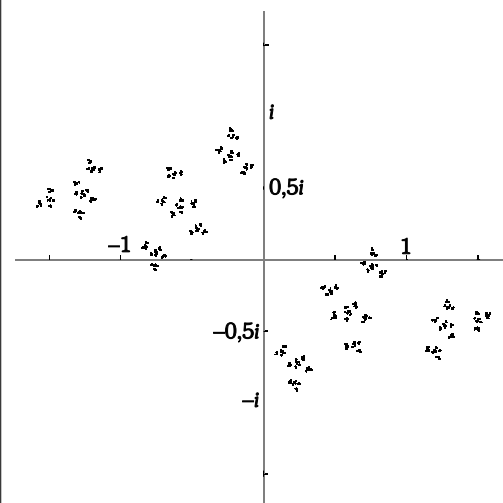
Sulkeuman määritelmästä seuraa, että S on tiheä $\bar{S}$:ssä ts. minkä tahansa kahden pisteen, jotka kuuluvat joukkoon $\bar{S}$ välillä on kolmas piste, joka kuuluu joukkoon S . Mikä tahansa Julian joukko on siis ”täynnä” repulsiivisia

jaksollisia pisteitä.

Tämä on kaikkein yleisimmin käytetty Julian joukon määritelmä. Sen avulla voidaan määritellä Julian joukko sellaisillekin funktioille, joilla ei ole attraktiivisia kiinteitä pisteitä. Mikäli kiinteä piste kuitenkin löytyy, on tämä määritelmä yhtäpitävä kaavan (3) kanssa.

Repulsiiviset pisteet siis kuuluvat Julian joukkoon ja attraktiiviset eivät. Neutraaleille pisteille asia ei ole niin yksinkertainen. Ne kuuluvat Julian joukkoon, jos niiden

Kuva 5: Tyypillinen epäyhtenäinen Julian joukko ($c = -0,8 - 0,8i$)



derivaatan argumentti jaettuna 2π :llä on rationaaliluku, mutta eivät kuulu, jos se on irrationaaliluku. ks. tarkemmin [11].

Edellä mainittujen lisäksi Julian joukoilla on seuraavia ominaisuuksia:

- Julian joukko sisältää ylinume-roituvan määrän pisteitä. Ts. Julian joukon pisteitä ei voi numeroida luonnollisilla luvuilla. Ne voidaan sen sijaan numeroida reaalityluilla. [11]
- Minkä tahansa Julian joukkoon kuuluvan pisteen positiivinen ja negatiivinen kiertorata kuuluvat myös Julian joukkoon.
- Minkä tahansa Julian joukkoon kuuluvan pisteen negatiivinen kiertorata on tiheä Julian joukossa.
- Julian joukko $J(f)$ on invariantti funktiossa f . Ts. Kun kaikille Julian joukon pisteille suoritetaan funktio f , saadaan uusi joukko, joka on sama kuin alkuperäinen Julian joukko.
- Minkä tahansa jossakin attraktion altaassa sijaitsevan pisteen negatiivinen kiertorata lähenee Julian joukkoa, kun iteraatiomäärä lähenee ääretöntä.

Toisen asteen polynomeja

Kaikkein tutkituimpia ovat Julian joukot toisen asteen polynomeille, eli funktioille, jotka ovat muotoa:

$$f(z) = az^2 + bz + d. \quad (4)$$

Tällaisia funktioita näyttäisi olevan varsin laaja valikoima, sillä kaavassa on kolme kompleksista vakiota, joille voidaan antaa eri arvoja. Ongelma on kuitenkin yksinkertaisempi, kuin miltä näyttää. Mikä tahansa muotoa (4) olevan funktion Julian joukko voidaan nimittäin muuttaa jonkin muotoa

$p_c = z^2 + c$ olevaksi Julian joukoksi pelkästään muuttamalla sen kokoa, pyörittämällä ja siirtämällä sitä kompleksitasolla [1]. Tämä muunnos voidaan esittää funktiona

$$M(z) = uz + v.$$

Väitämme nyt, että mikä tahansa funktion f iteraatioaskel voidaan suorittaa siten, että kuvataan lähtöpiste funktiolla M toiseen paikkaan, sen jälkeen suoritetaan vastaava iteraatioaskel funktiolla p ja kuvataan saatu piste takaisin funktiolla M^{-1} . Toisin sanoen:

$$\begin{aligned} f(z) &= M^{-1}(p(M(z))) \\ &= M^{-1}(p(uz+v)) \\ &= M^{-1}((uz+v)^2 + c) \\ &= M^{-1}(u^2z^2 + 2uvz + v^2 + c) \end{aligned}$$

Ja koska M :n käänteisfunktio on $M^{-1} = (z-v)/u$, niin

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(u^2z^2 + 2uvz + v^2 + c) - v}{u} \\ &= uz^2 + 2vz + \frac{v^2 - v + c}{u}, \end{aligned}$$

mikä on selvästikin samaa muotoa kuin (4). Vakiot voidaan nyt valita siten, että $a=u$, $b=v$ ja $d = \frac{v^2 - v + c}{u} \Leftrightarrow c = ad - b^2 + b$. Kun iteraatioita suoritetaan useita peräkkäin, voidaan muunnosfunktiot jättää välistä pois:

$$\begin{aligned} f^2(z) &= M^{-1}(p(M(M^{-1}(p(M(z))))) \\ &= M^{-1}(p(p(M(z)))) \\ &= M^{-1}(p^2(M(z))) \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että z kuuluu funktion f Julian joukkoon jos ja vain jos $M(z)$ kuuluu vastaavan funktion p_c Julian joukkoon. Näin ollen voidaan ymmärtää kaikkia toisen asteen Julian joukkoja pelkästään funktiota p_c tutkimalla.

Paraabeleilla on vastaava ominaisuus: Muotoa $y = az^2 + bz + d$ olevan reaalfunktion kuvaaja on paraabeli, jonka huippu voi sijaita missä tahansa pisteessä. Siirtämällä ja kokoa muuttamalla se voidaan kuitenkin muuttaa paraabeliksi, jonka yhtälö on muotoa

$$y = ax^2.$$

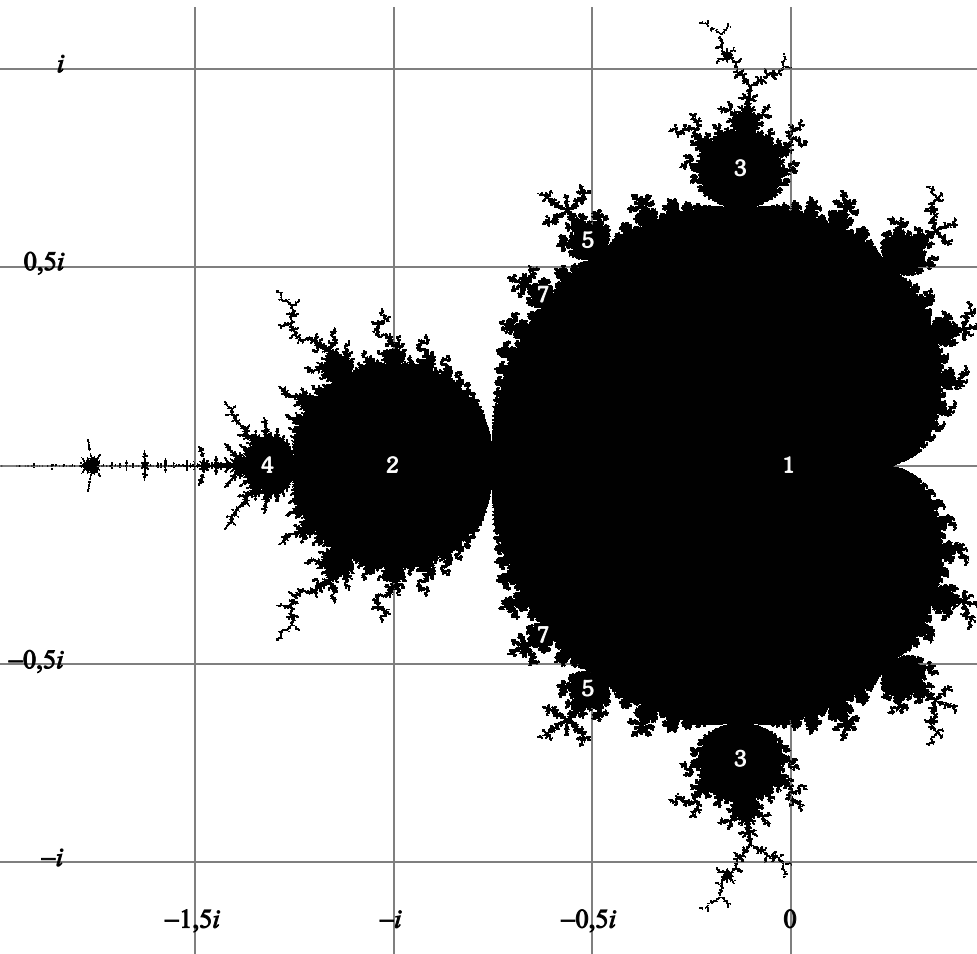
Toisen asteen Julian joukoilla on mm. seuraavia ominaisuuksia:

- Kaikki toisen asteen Julian joukot ovat symmetrisiä pisteen suhteen. Funktion p_c Julian joukot ovat symmetrisiä origon suhteen.
- Toisen asteen Julian joukot ovat joko yhtenäisiä, tai ns. Cantorin joukkoja, eli ne koostuvat äärettömästä määrästä irrallisia pisteitä.
- Funktiolla p_c on enintään yksi äärellinen attraktori, joka voi olla joko sykli tai kiinteä piste. Voidaan nimittäin osoittaa, että, että jokaiseen attraktion altaaseen kuuluu vähintään yksi ns. kriittinen piste. Funktiolla kriittisellä pisteellä tarkoitetaan pistettä, jossa funktion derivaatta on nolla, tai sitä ei ole. Toisen asteen funktiolla on kaksi kriittistä pistettä: ääretön, sekä derivaatan nollakohdasta (Yhtälöllä $D(az^2 + bz + d) = 2az + b = 0$ on vain yksi ratkaisu.) [1]

Fraktaalisuus ja kaaottisuus

Fraktaalilla tarkoitetaan kohdetta, jonka monimutkaisuus ei riipu tarkastelumittakaavasta. Esimerkiksi alempi kuvan 1 esittämästä Julian joukoista on fraktaali, sillä mikä tahansa sen osa näyttää suurennettuna yhtä monimutkaiselta kuin alkuperäinen joukko. Toisaalta esimerkiksi ympyrä ei ole fraktaali, sillä mitä enemmän jotakin sen kohtaa suurennetaan, sitä enemmän se muistuttaa suoraa viivaa. Fraktaaleista tarkemmin ks. esim. [15], [7] tai [5].

Jo Julia ja Fatou [6] olivat tietoisia monien Julian joukkojen fraktaalista ominaisuudesta, vaikka heidän aikanaan ei ollut käytävissä tarpeeksi tehokkaita tietokoneita, jotta joukoista olisi voitu tuottaa kuvia.



Kuva 6: Mandelbrotin joukko. Komponenttien sisälle merkityt luvut kertovat montako pistettä on funktion $p_c(z)=z^2+c$ attraktiivisessa syklistä, kun c sijaitsee jossakin kyseisen komponentin sisällä.

Esimerkiksi jo kaavasta (3) seuraa, että jos funktiolla on vähintään kolme attraktiivista kiinteää pistettä, sen Julian joukko on väistämättä fraktaalinen. Kaikkien Julian joukon pisteiden täytyy nimittäin sijaita kaikkien kolmen attraktiivon altaan kohtaamispisteissä. Tästä seuraa, että jos jollakin alueella näyttäisi olevan kahdella attraktiivon altaalla yhteinen reunaviiva, on tässä välissä väistämättä sijaittava pala kolmannen attraktorin alasta. Jos näin ei olisi, tuossa kohdassa olisi pala Julian joukkoa, joka ei olisi kolmannen altaan reunalla. Ks. kuva 4.

Kaikille Julian joukoille pätee myös, että jos otetaan mikä tahansa jonkin ympyrän rajaama osajoukko Julian joukosta $J(f)$, ja suoritetaan sille funktiota f tarpeeksi monta kertaa, se peittää lopulta koko Julian joukon. Merkitään

tätä Julian joukon osajoukkoa W :llä. Tällöin on olemassa jokin sellainen luonnollinen luku n , että

$$f^n(W)=J(f).$$

f^n on kaikkialla jatkuva ja derivoituva, mistä seuraa, että koko Julian joukon rakenne esiintyy myös yhdessä sen palasessa. Tämä ei kuitenkaan välttämättä tarkoita, että joukko olisi fraktaalinen. Esimerkiksi funktion p_c Julian joukoista tapaukset $c=0$ (origokeskeinen yksikköympyrä) ja $c=-2$ (jana -2 :sta 0 :aan) eivät ole fraktaaleja. [14]

Joukon fraktaalisuutta mitataan yleensä ns. Hausdorff-dimensiolla [15]. Se on luku, joka on sitä suurempi, mitä fraktaalisempi joukko on. Mikäli joukko ei ole lainkaan fraktaalinen sen dimensio on yhtä suuri kuin sen topologisen dimensio (esim. käyrälle 1 pin-

nalle 2 jne.). Julian joukoille Hausdorff-dimension tarkka määrittäminen on vaikeaa, mutta sitä voidaan arvioida kokeellisesti piirtämällä kuva joukosta, ja mittaamalla sitä eri tarkkuuksilla [14] [15]. Funktion p_c Julian joukoille, kun c on tarpeeksi pieni, voidaan laskea likiarvoja kaavalla [13]:

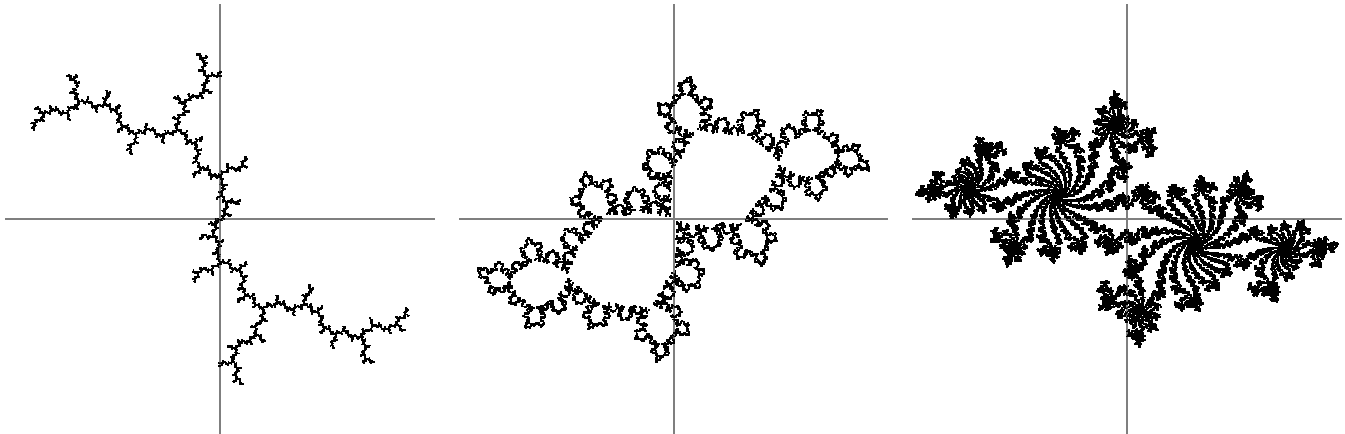
$$d_H = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2}.$$

Arvot ovat sitä tarkempia, mitä pienempi c on.

Mandelbrotin joukko

Jo pitkään on tiedetty, että funktion p_c Julian joukot ovat joillakin c :n arvoilla yhtenäisiä ja toisilla epäyhtenäisiä. Epäyhtenäiset joukot ovat ns. Cantorin joukkoja, eli ne koostuvat äärettömästä määrästä erillisiä pisteitä. Epäyhtenäiset joukot syntyvät yleensä suuremmilla c :n arvoilla kuin yhtenäiset. Esimerkiksi jos $|c| > 2$, on $J(p_c)$ aina yhtenäinen. Julian ja Fatoun aikaan ei kuitenkaan pystytty tarkasti sanomaan, millaiselta alueelta c piti valita, jotta saataisiin aikaiseksi yhtenäinen Julian joukko. Julia ja Fatou saivat kuitenkin selville, että Julian joukon yhtenäisyys voidaan päätellä funktion kriittisten pisteiden avulla. Funktiolla p_c on kaksi kriittistä pistettä: nolla ja äärettömä. Jos piste 0 kuuluu äärettömän attraktion altaaseen, niin funktiolla ei voi äärettömän lisäksi olla muita attraktoreita, sillä jokaisen attraktorin altaassahan on oltava vähintään yksi kriittinen piste. Tällöin Julian joukolla ei voi olla "sisäpuolta". Mm. tätä tietoa hyödyntäen Julia ja Fatou osoittivat, että $J(p_c)$ on yhtenäinen jos ja vain jos nolla kuuluu äärettömän attraktiivon altaaseen.

Niiden kompleksitason pisteiden joukkoa, joille $J(p_c)$ on yhtenäinen, kutsutaan nykyään Mandelbrotin joukoksi Benoit B. Mandelbrotin mukaan, joka ensimmäisenä tuotti tietokoneella kuvan



Kuva 7: Julian joukot funktiolle $p_c(z)=z^2+c$, kun $c=i$, $c=-0,39054-0,58679i$ ja $c=-0,6830+0,3328i$. Kuva-ala on kaikissa $[-1,5-1,5i; 1,5+1,5i]$. Julian joukko $c=i$ on tyypillinen dendriitti.

tästä joukosta 1970-luvun lopussa [7] [9]. Merkitsemme Mandelbrotin joukkoa M :llä. (ks. kuva 6) Mandelbrotin joukkoa on sanottu matematiikan kauneimmaksi ja monimutkaisimmaksi kuvioksi. Sen reunaviiva on fraktaalinen, ja sen Hausdorff-Besicovitch dimensio on 2, eli se on monimutkaisin mahdollinen käyrä, joka voi esiintyä kaksiulotteisessa avaruudessa.

Mandelbrotin joukkoa on sanottu yhden sivun kartaksi kaikista Julian joukoista, sillä sen reunaviivan muoto jonkin pisteen c läheisyydessä muistuttaa vastaavan Julian joukon ($J(p_c)$) muotoja. Tämä on luonnollista, sillä koska jokainen Mandelbrotin joukon piste c vastaa Julian joukon $J(p_c)$ pistettä 0, se vastaa myös sen pistettä c ($p_c(0)=0^2+c=c$). Tällöin liikkuminen jossakin Mandelbrotin joukon paikassa vastaa liikkumista vastaavan Julian joukon samassa paikassa. Julian joukko kuitenkin muuttuu jatkuvasti c :n arvon muuttuessa.

Mandelbrotin joukko kertoo muutakin Julian joukoista. Esimerkiksi kaikki ne c :n arvot, joilla p_c :llä on jokin attraktiivinen kiinteä piste sijaitsivat Mandelbrotin joukon kardioidin muotoisessa osassa. Vastaavasti jokaista Mandelbrotin joukon ”ympyrää” vastaa jokin kokonaisluku, joka kertoo, montako pistettä on funktion p_c äärellisessä attraktiivisessa syklissä, kun c valitaan kyseisen ympyrän sisältä. Kuvaan 6 on merkitty numeroilla kutakin ympyrää vastaava jakso.

Esimerkiksi kuvan 1 ylemmän Julian joukon tuottamiseen käytetty c on pääkardioidin yläpuolella suuren ympyrän keskipiste. Ympyröiden keskipisteet ovat aina attraktiivisia jaksollisia pisteitä.

Jos p_c on jokin jaksollinen sykli s , muodostaa tämän syklin attraktion allas Julian joukolle ”sisäpuolen”, eli $J(p_c)=\partial A(s)=A(\infty)$, ja Julian joukko on yhtenäinen. Mandelbrotin joukossa on kuitenkin myös pisteitä, joiden p_c :llä ei ole yhtään äärellistä jaksollista sykliä. Tällaisia ovat mm. ns. Misiurewiczin pisteet. Ne ovat sellaisia Mandelbrotin joukon pisteitä c , joille 0 on funktion p_c esijaksollinen, mutta ei jaksollinen piste. Tällaisten pisteiden Julian joukkoja kutsutaan dendriiteiksi. Niillä ei ole ”sisäpuolta”, mutta ne ovat kuitenkin yhtenäisiä. Tällainen on esimerkiksi $J(p_{-1})$ (ks. kuva 7).

Kuvien tuottaminen Julian ja Mandelbrotin joukoista on varsin yksinkertaista. Funktiolle p_c voidaan osoittaa, että jos kiertoradan jokin piste on itseisarvoltaan suurempi kuin 2 ja suurempi kuin c :n itseisarvo, niin kiertorata lähestyy ääretöntä. Jos itseisarvo ei ylitä tuota rajaa esimerkiksi 128 ensimmäisen iteraatiokerran aikana, voidaan melko varmasti todeta, että piste c kuuluu Mandelbrotin joukkoon, tai että se on Julian joukon ”sisäpuolella”. Usein käytetyn efektin saa aikaan värittämällä jokainen piste sen mukaan, kuinka monennella iteraatiolla itseisarvo ylitti valitun rajan. Kuvien tuottami-

seksi on myös saatavilla lukuisia valmiita tietokoneohjelmia, joista muutamia on lueteltu Seepian Internetsivulla.

Sampo Tiensuu

Kirjallisuutta

- [1] **Blanchard, B.:** *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bulletin of the American Mathematical Society 11 (1984): 85–141.
- [2] **Devaney, R. L.:** *Julia Sets and Bifurcation Diagrams For Exponential Maps*. Bulletin of the American Mathematical Society 11 (1984): 167–171.
- [3] **Devaney, R. L.:** *Fractal Patterns Arising in Chaotic Dynamical Systems*. Kirjassa [12].
- [4] **Devaney, R. L.:** *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [5] **Falconer, K. J.:** *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley Sons, 1999.
- [6] **Julia, G.:** *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*. Journal de Mathématiques pures et Appliquées 83 (1918): 47–245.
- [7] **Mandelbrot, B. B.:** *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York 1983 (1977).
- [8] **Mandelbrot, B. B.:** *Fractal Aspects of the Iteration of $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ for complex λ and z* . Annals of the New York Academy of Sciences 357 (1980): 249–259.
- [9] **Mandelbrot, B. B.:** *Fractals and the Rebirth of Iteration Theory*. Kirjassa [11].
- [10] **Peitgen, H.-O.:** *Fantastic Deterministic Fractals*. Kirjassa [12].
- [11] **Peitgen, H.-O.; Richter, P. H. (toim.)** *The Beauty of Fractals – Images of Complex Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1986.
- [12] **Peitgen, H.-O.; Saupe, D. (toim.)** *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York 1988.
- [13] **Ruelle, D.:** *Repellers for Real Analytic Maps*. Ergodic Theory and Dynamical Systems 2 (1982): 99–107.
- [14] **Saupe, D.:** *Efficient Computation of Julia Sets and Their Fractal Dimension*. Physica 28D (1987): 358–370.
- [15] **Tiensuu, S.:** *Luonnon geometriaa*. Seepia 1 (1999): 22–26.

Metafysiikan ominaisuuksista

Metafysiikka tieteenä

Metafysiikka on ala, joka tutkii, sanalla sanoen, vaikeasti kuvattavia asioita. Puuttumatta metafysiikan menetelmien tai ongelmien kokonaisvaltaiseen selittämiseen voidaan sanoa, että metafysiikka tutkii kaikkien (tämä sana on enemmän tai vähemmän todennukainen riippuen siitä, mitä metafysiisiä kirjoja on lukenut) asioiden olemusta tai "totuutta". Yksilön kannalta se voi pyrkiä selittämään toisten ihmisten toimia ja tunteita, toivottavien ja ei-toivottavien asioiden perusluonnetta, sanalla sanoen kaikkea inhimillistä (tämän artikkelin tarkoituksena on vuoksi ei kiinnitetä huomiota metafysiikan vähemmän selkeisiin osiin).

Eri yksilöt tarkastelevat tämän filosofian sisältämiä ongelmia hyvin erilaisin lopputuloksin, sellaisin, joiden avulla yksilöt jäsentävät ja selittävät maailmaa. Aivan ilmeisesti metafysiikan ajattelun pitäisi vaikuttaa yksilön elämäntarkastukseen tai oikeammin "tapaan elää". Kuitenkaan sellaisia asioita, joita metafysiikka tutkivat ihmiset tulevat lopulta sanoneeksi ei tavallisesti ole helppo mieltää sovellettavaksi ihmisten elämään. Hyvänä esimerkkinä on suurin osa Immanuel Kantin tuotannosta: ... aistien asia on havainnoida; ymmärryksen asia on ajatella. Ajattelu puolestaan merkitsee mielteiden yhdistämistä samassa tajunnassa. Tämä yhdistäminen tapahtuu joko vain subjektin kannalta ja on satunnaista ja subjektiivista, tai sitten se toteutuu absoluuttisesti ja on välttämätöntä eli objektiivista". [1]

On täysin mahdollista vastata kysymykseen ajattelusta tällä tavalla, jopa sisäistää lauseen merki-

tys ja pitää sitä totena. Kuitenkin on ilmeistä, ettei ole mahdollista suhtautua ympärillään tapahtuvaan ajatteluun tällaisella pragmaattisuudella millään todellisella tasolla; metafysiikka, etenkin tietynlainen, ei aihepiiristään huolimatta selvitä tutkijoilleen, miten maailman voi ajatella olevan tai miten sen sisältämät asiat esiintyvät "perimmäisessä totuudessaan". Tässä tapauksessa tutkittava ongelma voidaan ilmaista suhteellisen helposti, mutta vaatii huomattavaa selväjärkisyyttä ymmärtää lauseen merkitys; asettelu "satunnaista ja subjektiivista vs. absoluuttista ja välttämätöntä eli objektiivista" ei ole selkein mahdollinen. Se vastaus, joka on mahdollista löytää huomattavan epäselvyyden alta on melko yksinkertainen, toteaminen, jopa perusteeton lausahdus siitä, mitä ajattelu on.

Metafysiikassa kysytään monenlaisia kysymyksiä, mutta kaikkien vastausten perussisältö tuntuu löytyvän karkeasti sanottuna kahdesta eri metafysiisestä "katsomuksesta", joiden määritelmät eivät ole erityisen selkeitä, mutta joiden muodostamat ryhmittyvät tuntuvat pysyvän samanlaisina hyvinkin monimuotoisissa kysymyksissä. Paljon tutkitut kysymykset, ja sellaiset, jotka jakavat metafysiisiä maailmankatsomuksia, liittyvät nimenomaan varsin inhimillisiin ominaisuuksiin ja tapahtumiin eivätkä siksi tunnu ensinäkemältä mitenkään kattavilta ajatuksilta. Etsitään siis vastauksia sellaisiin kysymyksiin kuin "onko (inhimillinen) hengellinen tai ei-aineellinen tapahtuminen selitettävissä (vain) aineen kautta" tai hiukan yleisemmin "mikä on (inhimillisesti havaitun) aineellisen maailman suhde hengelliseen ominaisuuteen (esimerkiksi ajatukseen missä tahansa muodossa, jossa se voidaan ilmais-

ta)".

Kysymysten asettelu on siksi vaikeaa ja täynnä sulkeita, että osa vastaajista kieltää aineellisen "todellisuuden" olemassaolon kaiken kaikkiaan ja toinen osa kieltää hengellisten asioiden itsenäisen olemassaolon. Tällaisilla perusteilla jakautuvista vastauksista voidaan erottaa ainakin sellainen ryhmä, joka katsoo, että hengellinen maailma on erillään aineellisesta, vieläpä että aineellista maailmaa ei ole, vaan se on yksinomaan "mielle" tai osa jonkinlaista hengellistä maailmaa. Toisaalla on näkökanta, jonka mukaan maailma ja kaikki siinä ilmenevät tapahtumat ovat nimenomaan aineellisia, ja sikäli kuin hengellisiä asioita, esimerkiksi ajatuksia, on olemassa, ne ilmenevät aineellisesti, jollakin tavalla tulkittavassa muodossa, sikäli kuin kaoottisen monimutkainen kokonaisuus (esimerkiksi aivot) tulkittaa tekee. Tätä selitetään mahdollisimman nykyaikaisen tieteellisen näkemyksen mukaisesti, tällä hetkellä hiukan sekavilla neurologisilla ja fysikaalisilla ilmaisuilla.

Jälkimmäisen näkökannan edustajat ajattelevat vaihtelevasti myös, että nämä ajatukset ovat (voivat olla) sikäli hengellisiä, että ne voidaan ilmaista aineellisessa maailmassa täysin fyysisesti erilaisella tavalla kuitenkin niin, että kahdessa ilmiössä on jotakin olennaisesti samaa. Tämä erilaisuus on, kuten myöhemmin huomataan, varsin kiinnostava.

Näitä näkökantoja kutsutaan vaihtelevin tavoin, yleisesti ottaen edellinen on nimeltään idealistinen näkökanta, jälkimmäinen on materialistinen. Näiden osapuolten johtopäätökset ovat kaiken kaikkiaan "valtavirran mukaisia", nämä ovat juuri niitä ajatuksia, jotka ovat selvinneet hengissä vuosisataisesta tutkiskelusta,

näitä ajatuksia (jompaa kumpaa) pitävät asioita työkseen ajattelevat ihmiset useimmissa tapauksissa kaikkein oikeimpina, totuutta parhaiten tavoittelevina. Selvästi asia on kuitenkin niin, ettei kumpakaan varsinaisesti sovelleta ihmisten elämässä. Idealistit, vaikka antavatkin palttua heidän silmiensä edessä (ilmeisesti) olevalle aineelliselle maailmalle, alistuvat sille ja toimivat siinä kuten materialistitkin. Materialistit tuntevat (ainakin tämän artikkelin ajan näin voidaan ajatella) yhtä voimakkaasti kuin idealistitkin, kiinnostamatta huomiota siihen, että kyseessä oleva ilmiö on heidän mukaansa monimutkainen seos yksinkertaisia asioita; sähköimpulsseja ja kemikaaleja.

Ehkä se huomio, että ihmiset ovat "pohjimmiltaan kaikki samanlaisia" ja että "ajattelu ei vaikuta toimintaan" ei ole kauhean järeisyttävä. Voidaan kuitenkin pitää ajattelua ja metafysiikkaa eri asioina; tarkoittaen sitä, että "käytännön" ajattelu, joka ei välttämättä vaikuta elämään tai yksilön toimintaan, on eri asia kuin metafysiset näkemykset (jopa mielipiteet), ja että nämä metafysiset näkemykset voivat hyvinkin vaikuttaa ajatusten suuntautumiseen. Tässä tapauksessa yksilön metafysisillä näkemyksillä on samantapainen asema kuin hänen kulttuuritaustallaan (tai vastaavalla psykologisesti määritellyllä elementillä).

Metafysiikka ja luonnontieteet

Kuten edelläolevasta käy ilmi, metafysiikka on varsin kaukana luonnontieteistä. Se on aikojen kuluessa muuttunut voimakkaasti; esimerkiksi René Descartes piti varsin sopivana antaa "Metafyyssisiä mietiskelyjä" -teoksellensa lyhyen kuvauksen Metafyyssisiä mietiskelyjä, joissa todistetaan selvästi Jumalan olemassaolo sekä ihmisen sielun ja ruumiin välinen todellinen eroavuus"[2]. Tässä tapauksessa metafysiikka esiintyy matematiikan kaltaisena tieteenä, jossa todistetaan todeksi tai vääräksi maailmaan liittyviä lauseita. Kun tätä ris-

tiriitaista tiedettä ilmenee jatkuvasti lisää, eivätkä sen todistelut ole monessakaan tapauksessa tyydyttäviä, on käytännönläheisesti alettu pitämään metafysiikkaa "pelkänä" metafysiikkana, tieteenä, joka ei löydä vastauksia. Se, että varsin arvostetut filosofiset tahot ovat todenneet (toisten arvostettujen filosofisten tahojen kauhistukseksi), että metafysiikan kysymykset eivät todellisuudessa ole kysymyksiä, vaan ne vain näyttävät kysymyksiltä, ei merkitse mitään; se on vain "lisää metafysiikkaa".

Yleensä ottaen fyysikkoja eivät ole suuremmin liikuttaneet vastaavanlaiset huomautukset metafysiikkojen taholta siitä, että maailmaa, jota fyysikot tutkivat, ei ole olemassa. Se, että metafysiikka ei tuo fysikaaliseen tutkimuskenttään mitään uutta aineistoa, on jonkinlainen tapaus metafysiikan vaikuttamattomuudesta ihmisten elämien tapahtumiin. Kuitenkin voisi kuvitella, että eri yhteiskunnissa ja kulttuureissa vallitsevat metafysiset ajatukset vaikuttaisivat tieteen kehitykseen. Fyysikkojen tapaylenkatsoa metafysiikkaa liittyy ennen kaikkea siihen, ettei metafysiikka vaikuta siihen, mitä tiede tutkii - tämä kysymys ei ole merkittävän kiistanalainen. Mutta tieteellinen tutkimus on kautta aikojen tehnyt enemmän vääriä johtopäätöksiä kuin oikeita (sikäli kuin oikeita johtopäätöksiä yleensä on; nykytieteestä voidaan sanoa lähinnä se, ettei nykyinen tieteenkäsitteitys ainakaan ole lopullinen), ja nämä väärät johtopäätökset voivat hyvinkin johtua metafysisistä väkaumuksista.

Tieteellinen ajattelu pyrkii aina olemaan objektiivista, ennako-oletuksista vapaata ja itse asiasa metafysiikasta vapaata. On havaittu ilmeisen vaikeaksi saada tiedemiehiä uskomaan, että heidän näkemyksensä mistä tahansa - esimerkiksi siitä, että muut taivaankappaleet kiertävät maata, johtuu metafysiikasta. Kyseisillä tiedemiehillä oli aineistoa, jonka mukaan heidän päidensä yläpuolella kiersi tunnistettavia taivaankappaleita, joita näytti olevan yhtä paljon joka suuntaan. Tästä he tekivät ainoan

loogiselta tuntuneen johtopäätöksen. Päätös tuntui kuitenkin ainoalta loogiselta tiedostamattoman liisäaineiston takia; he uskoivat, että korkeampi taho oli luonut heidän planeettansa ainoaksi olennaiseksi planeetaksi, että kaikkea hallitseva olento käytti kaiken aikansa hallitakseen ja tarkkaillakseen juuri heitä.

Voidaan sanoa, että heidän tieteelliset välineensä (silmit) eivät olleet yhtä kehittyneitä kuin oman aikamme välineet, ja tästä syystä tutkimuksemme on objektiivisempaa. Onkin sanottava, että tiede on nyt "parempaa" kuin silloin; sitä on tutkittu kauemmin ja paremmin. Kuitenkin luonnontieteellisten teorioiden elinikä on edelleen varsin lyhyt, ja se lyhenee koko ajan. Tieteellä (tässä tapauksessa tarkoitan länsimaista tiedettä, länsimaista katsottuna muunlaista ei juuri ole) on kuin onkin metafyyssinen akillen kantapää; metafysiikka ei ole käyttökelpoinen väline tiedemiehille, mutta se vaikuttaa jatkuvasti tieteen tuloksiin. Kysymys siitä, voidaanko ihmisen päättelyn avulla tässä tapauksessa löytää lopullista vastausta yleensä mihinkään fysikaaliseen kysymykseen, ei ole varsinaisesti metafyyssinen eikä ainakaan kovin yksinkertainen, joten jätän sen käsittelemättä.

Metafysiikka ja taide

Vastakkaisasetelma materialistien ja idealistien välillä on taidetta tutkittaessa erityisen mielenkiintoinen. Miten materialistinen näkemys selittää taiteen, hengellisesti luovaa materiaalin, tuottamisen? Osin edellämainituin tieteellisin selityksin; aivot sekoittavat lähes kaoottisella tavalla ärsykeitä, jotka on lajiteltu niin monin tavoin, että syntyy jotakin näennäisesti uutta. Aiemmin mainittu eroavaisuus erilaisten materialistien välillä on kuitenkin samanlainen sekä taiteessa että ajattelussa. Millä perustein ihminen voi sekä olla materialisti että katsoa taiteen ja ajattelun omaavan muutakin sisältöä kuin fysikaalisen kokoonpa-

non? Asiaa on hiukan vaikea selittää.

Voisi sanoa, että asioilla katsotaan olevan merkitystä ainoastaan omassa kontekstissaan, siinä maailmassa, jossa ne esiintyvät. Fysikaalisesti, "todellisesti" asioilla ei välttämättä ole lainkaan eroavaisia merkityksiä, mutta kun ihmisten tuottamaa taidetta tai ajattelua tulkitsee toinen ihminen, vastavalla tavalla kaoottinen yksilö, tutkivan systeemin puitteissa tai kontekstissa asioilla on merkitystä. Vertaus on ontuva, mutta samalla tavalla suhteellisuusteorian esittämät yksittäiset lauseet tuntuvat "maalaisjärjen vastaisilta" perinteisen fysikaalisen ajattelun kontekstissa, mutta kyseisen teorian kontekstissa ne ovat loogisia seurauksia aikaisemmin todetusta. Vaikuttaa siis siltä, että kaikissa tapauksissa materialistinen tapa selittää ilmiöitä palautuu melko mitättömiltä tuntuviin lauseisiin, jotka liittyvät yleensä puutteellisiin luonnontieteisiin.

Kaikesta huolimatta on virhe tehdä sellainen päätelmä, että materialistisen ajattelun vaikutus ihmisen elämään tai tapaan ymmärtää esimerkiksi taidetta on välttämättä voimakkaasti erilainen kuin idealistin. Eri tavoilla selittää ilmiö ei ole välttämättä mitään tekemistä ilmiön sisällön tulkinnan kanssa. Kun sanotaan "taide on merkitsevää ainoastaan sitä tulkitsevan systeemin kontekstissa", se kuulostaa ymmärrettävästi taidetta (tai sanotaan yleisesti ei-aineellisia ominaisuuksia) vähättelevältä lauseelta. Materialistinen (puhuen edelleenkin vain osasta materialisteja) tapa ajatella, että fysikaalinen olemus ja kokoonpano on kaikelle yhtäläistä ja että muu on tämän fysikaalisuuden lähinnä sattumasta johtuvaa tulkintaa ei, kuten aiemmin todettiin, omaa mitään käytännön merkityksiä.

Metafysiikan seurauksista

Oikeastaan kaikki metafysiset kannat tuntuvat tavallisesti sitä hankalemmilta ylläpitää, mitä

pidemmälle menevää niillä suoritettu tutkimus on. Materialistinen dilemma on sekava; materialistiset näkemykset ovat niin voimakkaasti inhimillisen kokemuksen vastaisia, että ajaututaan ongelmiin, kun yritetään selittää inhimillisen ajattelun ilmenemistä sellaisena kuin sitä havaitaan. Materialistinen etiikka vaikuttaa myös epäselvältä; seuraako siitä, että ei katsota olevan olemassa minkäänlaista tietoisuutta, jolla olisi omia ominaisuuksia, joka olisi enemmän kuin osiensa summa, se, ettei voida katsoa olevan minkäänlaista moraalista ihmisten suorittamana ihmisiä kohtaan? Sillä jos aivot, joiden voidaan tulkita muodostavan tietoisuuden, eivät ole muuta kuin rakennesiensa summa, miksi niitä olisi suojeltava?

Hiukan epätydyttävästi voidaan vedota lähinnä aikaisemmin mainittuun moraaliin kontekstissaan; ihmisten moraali toisiaan kohtaan on perusteltua sikäli, että ihmisten tarkoituksiperiä tehdä yleensä mitään voidaan tarkastella vain inhimillisessä systeemissä. Sanomatta mitään aivojen ylläpitämän tajunnan olevaisuudesta voidaan sanoa, että ihmisten väkivalta toisiaan kohtaan ei ole moraalista siksi, että väkivaltaa tekeväle olenolle (olennon kannalta) väkivallan kohteena olevat oliot ovat tiedostavia, jopa sielun omaavia (jos sellaista sanaa halutaan käyttää). Monet tällaiset ongelmat, jotka esiintyvät materialistisessa metafysiikassa, ovat palautettavissa (tässä tapauksessa lähinnä vähemmän nihilistiseksi tai armottomiksi; sikäli kuin filosofi pyrkii ylläpitämään sekä materialistista näkemystä että hyveellistä ja mahdollisimman inhimillistä moraalista ja muuta filosofiaansa) vähemmän ongelmallisiin kantoihin.

Idealismi kulkeutuu erilaisiin ongelmiin, joissa asioiden selittäminen pohjautuu eräänlaiseen intuitioon. Parhaiten tunnettu esimerkki idealistisen ajattelun perusteista (on mainittava, että argumentaatio on ko. ajoista muuttunut ja monimuotoistunut) on René

Descartesin lauseesta "ajattelen, siis olen" lähtevä pohdinta. Descartes sanoi, että koska hän voi kuvitella olevansa ilman aineellisia attribuuttejaan, ja että niiden olemassaolo on yhtä todennäköistä kuin niiden olemassaolemattomuus, mutta että hän ei voi kuvitella olevansa olematta jonkinlaisena sieluna tai henkenä, voi hän varmasti sanoa, että aine ja henki ovat kaksi erillistä asiaa, ja että mahdollisesti hänen sielunsa on tällä hetkellä siinä ruumiissa, jossa se näyttää olevan - tai se voi olla olematta. Varmuus on siis hengestä, mutta ei aineesta.

Keskustelu tämän Descartesin väitteen ja materialistien välille ei ainakaan synny kovin helposti; materialismin kontekstissa väite on irrelevantti, sillä siinä ei katsota hengen yleensä olevan muuta kuin ainetta; tällöin hengen päättelyt itsestään ovat jonkinlaista sattumaa, ei totuutta (tämä lause muuttuu ongelmalliseksi materialismin kannalta muissa yhteyksissä). Joka tapauksessa Descartesiin pohjautuva metafysiikka sisältää luonteenomaisesti tällaisen intuitiion elementin, jossa irrotetaan kaksi asiaa toisistaan tekemällä "ajatuskokeita", ja todetaan, että koska tilanne pysyi loogisena, ei olisi ainakaan epäloogista, että näin olisi. Tämä näkemys muiden näkemysten avittamana johtaa monimutkaisempiin idealistisiin ajatuksiin, jotka kuitenkin pohjautuvat - hiukan kärjistäen - mielipiteeseen siitä, mikä on mahdollista ja mikä ei. Kun metafysiikkaa kuitenkin näyttää olevan suhteellisen mieltävaltainen määrä, idealismin ei voida sanoa olevan tältä osin mitenkään ennenkuulumattoman huonolla pohjalla.

Sam Hardwick

Kirjallisuutta

- [1] Kant, Immanuel: Prolegomena. Gaudeamus/yltiopistopaino, Helsinki 1997
- [2] Descartes, René: Teoksia ja kirjeitä. WSOY, Helsinki 1956
- [3] Van Inwagen, Peter: Metaphysics. Oxford University Press, Oxford 1993

Suosittelaa luettavaksi:

Ayer, A. J. : Language, truth and logic. Gollancz, London 1936