Kiertoratamekaniikkaa

Kiertoratamekaniikka on mekaniikan ala, joka tarkastelee kappaleiden liikkeitä gravitaatiovoimien vaikutusten alaisina. Tässä artikkelissa tarkastellaan aihetta satelliittien ja avaruusalusten näkökulmasta.

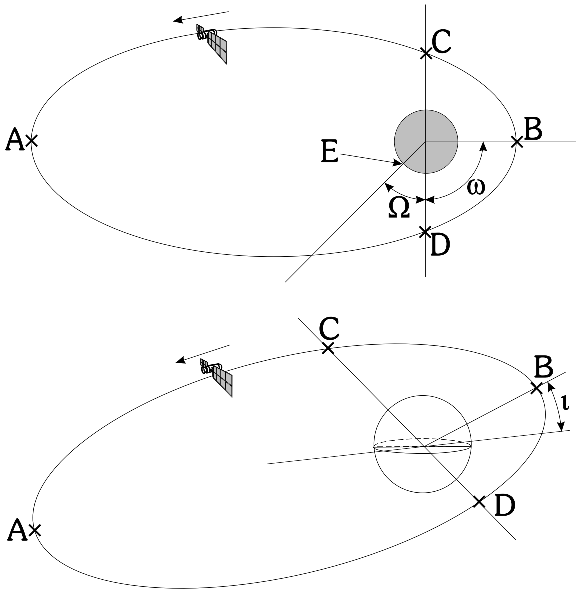
Avaruudessa kappaleisiin ei vaikuta muita kuin gravitaatiosta johtuvia voimia, sillä väliainetta ja siten ollen vastusta ei käytännössä ole. Tämän takia liike avaruudessa on hyvin lainalaista ja siksi kohtuullisen helppoa tarkastella, jos kappaleita on vain kaksi. Useamman kappaleen systeemeissä matemaattinen tarkastelu on erittäin vaikeaa, jollei jopa mahdotonta. Satelliittien kohdalla tätä ongelmaa ei kuitenkaan ole, koska ongelmat käsittelevät yleensä satelliitteja kiertoradalla, jolloin Auringon ja muiden taivaankappaleiden vaikutusta ei juuri tarvitse huomioida.

Avaruusalukset liikkuvat avaruudessa siis tiettyjä ratoja pitkin, jotka Keplerin ensimmäisen lain mukaan ovat ellipsejä (ympyrä on ellipsin erikoistapaus). Jotta aluksen kiertorata saataisiin määritettyä, on tunnettava radasta kuusi ns. rataelementtiä: isoakselin puolikas, eksentrisyys, inklinaatio, nousevan solmun pituus, perigeumin argumentti sekä perigeumaika.

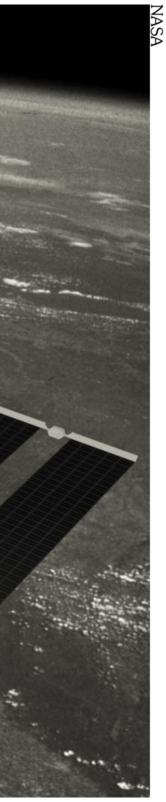
Isoakselin puolikas on puolet rataellipsin isoakselin pituudesta. Eksentrisyys on lukuarvo, joka saadaan, kun rataellipsin polttopisteiden välimatka jaetaan isoakselin pituudella. Tämä luku määrää radan muodon. Ympyräradalla eksentrisyys on nolla. Inklinaatio on kiertoradan ja kierrettävän kappaleen ekvaattoritason välinen kulma. Nouseva solmu on kiertoradan piste, jossa satelliitti nousee radallaan Maan ekvaattoritason pohjoispuolelle. Vastaavasti laskeva solmu on piste, jossa siirrytään eteläpuolelle. Nousevan solmun pituus on nollapituuspiirin ja solmun välinen kulma.

Perigeum on ellipsiradan piste, joka on lähimpänä Maata. Aurinkoa kierrettäessä vastaava piste on nimeltään periheli. Kauimmainen piste on nimeltään apogeum (apheli). Perigeumin argumentti on perigeumin ja nousevan solmun välinen kulma. Perigeumaika on hetki, jolloin satelliitti ohittaa perigeuminsa.

Näiden rataelementtien avulla voidaan edelleen laskea radan apogeum- ja perigeumetäisyydet sekä määrittää aluksen tarkka paikka radalla. Näitä tietoja voi-



Kuva 2: *Kuva, jossa Maapallo on harmaa ympyrä, on kuvattu kohtisuoraan ratatasoa vasten. Toinen kuva on kolmiulotteinen. Kumpikin kuva esittää samaa rataa. Merkkien selitykset: A = apogeum, B = perigeum, C = laskeva solmu, D = nouseva solmu, E = nollapituuspiiri, Ω = nousevan solmun pituus, ω = perigeumin argumentti, ι = inklinaatio.*



Kuva 1: *Kansainvälinen ISS-avaruusasema*

daan käyttää siirtymäratojen, laukaisu- ja laskeutumisikkunoiden sekä kohtaamisaikojen määrittämiseen. Seuraavassa johdetaan joitakin peruskaavoja lähtien liikkeelle tutuista mekaniikan laeista.

Kauniita kaavoja

Newtonin ensimmäisen lain mukaan kappale jatkaa suoraviivaista liikettä, mikäli siihen ei vaikuta voimia. Ympyräradalla kiertävään kappaleeseen vaikuttaa siis jokin voima, joka vetää kappaletta pois suoralta radalta. Kiertoratamekaniikan kohdalla kyseessä on gravitaatio, jonka suuruus saadaan Newtonin gravitaatiolaista. Tämä voima aiheuttaa kappaleeseen keskeiskiihtyvyyden, joka on siis yhtä suuri kuin normaalikiihtyvyys ympyräradalla. Näistä voidaan ratkaista nopeudeksi r-säteisellä ympyräradalla M-massaisen kappaleen ympärillä:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \qquad (1)$$

Kaavassa ei oteta huomioon satelliitin massaa, koska se on kierretävään taivaankappaleeseen, esim. Maahan, verrattuna merkityksetön, jolloin se ei aiheuta mainittavaa muutosta Maan liiketilassa.

Kulmaliikemäärän säilymisen periaatteen perusteella ellipsiradalla kappaleen kulmaliikemäärä on joka hetkellä vakio eli $L = mv_\phi r = \text{vakio}$ [3 s.64]. Radan kahdelle mielivaltaiselle pisteelle voidaan siis kirjoittaa $mv_{\phi 1}r_1 = mv_{\phi 2}r_2$, mistä massat supistuvat. Jos näiksi kahdeksi pisteeksi määrätään perigeum ja apogeum, voidaan kirjoittaa $r_p v_p = r_a v_a$, missä alaindeksi p tarkoittaa perigeumia ja a apogeumia [1].

Energian säilymislain mukaan kappaleen liike-energian ja potentiaalienergian summa on vakio. Voidaan siis kirjoittaa:

$$\tfrac{1}{2} m v_p^2 - \tfrac{\gamma m M}{r_p} = \tfrac{1}{2} m v_a^2 - \tfrac{\gamma m M}{r_a}.$$

Tämän yhtälön sekä yhteyden $r_p v_p = r_a v_a$ avulla saadaan ratkaistua nopeudet ja säteet ellipsiradan perigeumissa:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M r_a}{r_p\,(r_a + r_p)}} \qquad (2)$$

$$r_p = \frac{r_a}{\frac{2\gamma M}{v_a^2 r_a} - 1} \qquad (3)$$

Apogeumissa vastaavat nopeudet ja säteet saadaan vastaavasti vaihtamalla alaindeksit a:sta p:ksi ja p:stä a:ksi, mikä voidaan osoittaa johtamalla kyseiset kaavat.

Kiertoaika tasaisessa ympyräliikkeessä on $T = 2\pi r/v$. Tähän sijoittamalla ratanopeuden kaava (1) saadaan kiertoajaksi

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} \qquad (4)$$

Tämä pätee myös ellipsiradoille, jos säteen tilalla käytetään isoakselin puolikasta $\frac{1}{2}a$ [1]. Ympyräradallahan isoakseli $a = 2r$, jolloin $\frac{1}{2}a = r$.

Isoakselin puolikkaan $\frac{1}{2}a$ ja eksentrisyyden e avulla voidaan laskea perigeumin ja apogeumin etäisyydet kaavoilla [1]

$$r_p = \frac{a}{2}(1-e) \qquad (5)$$

$$r_a = \frac{a}{2}(1+e) \qquad (6)$$

Näistä saadaan johdettua kaava isoakselin puolikkaalle, kun tunnetaan säteet:

$$\frac{a}{2} = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad (7)$$

Näiden avulla päästään siis käsiksi kiertoratamekaanisiin ongelmiin, jos tiedetään vain rataelementit.

Avaruuslennon mekaniikkaa

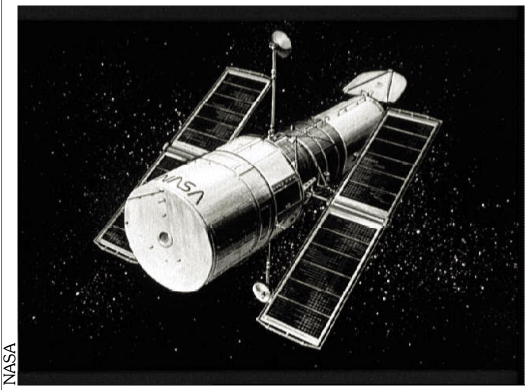
Käytännössä näitä kaavoja käytetään ongelmissa, joissa on selvitettävä nopeudenmuutokset, jotka avaruusaluksen on tehtävä siirtyäkseen kiertoradalta toiselle. Esimerkiksi matalan kiertoradan satelliitin on ajoittain korotettava ilmanvastuksen takia madaltunutta rataansa. Tällöin energian kannalta edullisin keino on laittaa satelliitti ellipsiradalle, jonka apogeum on halutun radan korkeudella. Ensimmäinen poltto suoritetaan tämän ns. siirtymäradan perigeum-pisteessä. Toinen poltto tarvitaan apogeum-pisteessä, jotta rata saataisiin uudelleen ympyräradaksi. Tällaisen tehtävän nopeudenmuutokset eli delta-v:t on helppo laskea.

Esimerkki 1:

ISS-avaruusaseman rata on ilmakehän ulko-osien vastuksen takia pudonnut ympyräradaksi 325 km korkeuteen. Tehtävänä on laskea tarvittavat delta-v:t polttoja varten, jotta rata saadaan palautettua 400 km korkeuteen.

Ratkaisu:

Ratojen säteet eli siirtymäradan perigeum- ja apogeum-pisteet ovat $r_1 = r_p = 6703140\ m$ ja $r_2 = r_a = 6778140\ m$. Satelliitin nopeudet alemmalla ja ylemmällä ympyräradalla saadaan kaavasta (1): $v_1 = 7711\ m/s$ ja $v_2 = 7668\ m/s$. Nopeudet siirtymäradan apogeumissa ja perigeumissa saadaan sijoittamalla kaavaan (2): $v_p = 7732\ m/s$ ja $v_a = 7647\ m/s$. Näin voidaan laskea polttojen edellyttämät delta-v:t: $\Delta v_1 = v_p - v_1 = 21\ m/s$ ja $\Delta v_2 = v_2 - v_a = 21\ m/s$. Ensimmäisessä poltossa



Kuva 3: *Hubble-avaruusteleskooppi*

nopeutta on siis kiihdytettävä 21 m/s. Tämän jälkeen odotetaan puoli kiertoaikaa, jonka jälkeen toisessa poltossa nopeutta kiihdytetään vielä 21 m/s, jolloin ollaan ympyräradalla 400 km korkeudessa.

Vastaavasti voidaan laskea tarvittavat delta-v:t, jos halutaan pudottaa rataa. Tällöin arvot ovat luonnollisesti negatiiviset.

Edellä esitelty siirtymäradan määritys on vielä hyvin yksinkertaista, mutta tehtävä vaikeutuu hieman, jos mukana on aikarajoitus. Tällöin otetaan käyttöön ns. laukaisuikkuna, joka tarkoittaa hetkeä, jolloin poltto on suoritettava, jotta alus olisi oikeassa paikassa oikeaan aikaan. Tämä on usein tilanne, kun on laskettava siirtymäratoja kahden aluksen välistä kohtaamista varten.

Esimerkki 2:

Hubble-avaruusteleskooppi kiertää Maata 750 km korkeudella ympyräradalla. Teleskoopin ohjausjärjestelmää korjaamaan lähetetty Endeavour-avaruussukkula on ympyräradalla 350 km korkeudella. Laske tarvittavat poltot sekä hetki, jolloin poltto on suoritettava, jotta Endeavour saapuisi Hubblen luo. Hetkellä T=0 h 0 min 0 s Endeavour sijaitsee radallaan 40°W pituuspiirin yläpuolella ja Hubble 10°E yläpuolella. Ratojen inklinaatiot ovat samat.

Ratkaisu:

Perigeum- ja apogeum-etäisyydet: $r_1 = r_p = 6728140\ m$ ja $r_2 = r_a = 7128140\ m$. Nopeudet ympyräradoilla kaavasta (1): $v_1 = 7697\ m/s$ ja $v_2 = 7479\ m/s$. Nopeudet siirtymäradan perigeumissa ja apogeumissa kaavasta (2): $v_p = 7807\ m/s$ ja $v_a = 7369\ m/s$. Tarvittavat nopeudenmuutokset polttoja varten: $\Delta v_1 = v_p - v_1 = 110\ m/s$ ja $\Delta v_2 = v_2 - v_a = 110\ m/s$. Nyt on siis saatu tarvittavat poltot ratkaistua, enää ratkaistavana on ajoitus. Ulomman radan kiertoaika on kaavalla (4) laskettuna $T_1 = 5492\ s$. Siirtymäradan kiertoaika saadaan samasta kaavasta: $T_s = 5738\ s$, kun ensin on laskettu isoakselin puolikas kaavalla (7) ja sijoitettu se säteen paikalle. Merkitään t = aika, joka on odotettava ennen polttoa. Voidaan kirjoittaa:

$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_s = \alpha_0 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_h$,

missä $\Delta\alpha_1$ ja $\Delta\alpha_2$ ovat sukkulan ja satelliitin kiertymät odotuksen aikana, α_0 satelliitin etumatka alkutilanteessa ja $\Delta\alpha_s$ sekä $\Delta\alpha_h$ siirtymisen aikaiset kiertymät, s sukkulalle ja h hubblelle. Koska kiertymä ympyräradalla $\alpha = vt/r$, voidaan yhtälö kirjoittaa muotoon $v_1 t/r_1 + \pi = 5\pi/18 + v_2 t/r_2 + \frac{1}{2}T_s 2\pi/T_1$, mistä saadaan ratkaistua t = 10692 s. Poltto on siis aloitettava hetkellä T+10692 s eli T+2 h 58 min 12 s.

Samalla tavoin voidaan määrittää laskeutumisikkuna, kun tiedetään, että laskeutumispisteen säde = maan säde ja kiertoaika = 24 h.

Tässä esitetyt esimerkit ovat kaikki hyvin yksinkertaistettuja malleja. Siirtymäradat on laskettu ns. Hohmannin siirtymäratoina, mikä on kyllä energian kannalta tehokkain menetelmä, mutta sen suorittaminen kestää puoli kiertoaikaa. Tätä menetelmää käytetäänkin lähinnä hyvin korkealla lentävien satelliittien ratojen korotukseen. Todellisuudessa käytetään ns. nopeaa siirtymärataa, jolloin satelliitti saa ellipsiradan, jonka apogeum on kohdekiertoradan ulkopuolella. Tällöin joudutaan halutulle korkeudelle saavuttaessa suorittamaan pidempi poltto, jotta saataisiin oikealle radalle. Tämä menetelmä siis kuluttaa paljon polttoainetta, mutta on nopeampi suorittaa. Erityisen tärkeää tämä on esim. vakoilusatelliitteille, joiden on pystyttävä muuttamaan rataansa nopeasti.

Toinen yksinkertaistus on se, että tässä on tarkasteltu tasossa tapahtuvia siirtymiä. Nämä muuttavat radan muotoa, mutta eivät sen sijaintia avaruudessa. Kaikki poltot tapahtuvat samassa tasossa. Kuitenkin esim. inklinaatiota muutettaessa on suoritettava pois tasosta suuntatunut poltto joko nousevan tai laskevan solmun kohdalla.

Jari Varje

Kirjallisuutta

[1] **R. Braeunig**; *Rocket and Space Technology.* http://users.commkey.net/Braeunig/space/

[2] **H. Karttunen**; **H. Oja**; **P. Kröger**; **M. Poutanen**; *Tähtitieteen perusteet.* Ursa, Helsinki 1984.

[3] **E. M. Salonen**; *Dynamiikka II.* Yliopistokustannus/Otatieto, Helsinki 1999.

NASA

Kuva 4: *Avaruussukkula Atlantis*