Kultainen kulmio

Säännöllisen kuusikulmion piirtäminen geometrisesti on helppoa: tarvitsee vain erottaa ympyrän kehältä kuusi säteen pituista janaa. Kun kärkipisteiden lukumäärää vähennetään yhdellä ja yritetään konstruoida viisikulmio, tehtävä mutkistuu.

Säännöllisen viisikulmion piirtämisessä hyödynnetään kultaista leikkausta. Jana b on kultaisen leikkauksen suhteessa janaan a, jos janan $a-b$ suhde janaan b on yhtä suuri kuin janan b suhde janaan a. Suhteelle saadaan numeerinen arvo, kun asetetaan $a=1$ ja ratkaistaan verranto

$$\frac{a-b}{b}=\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

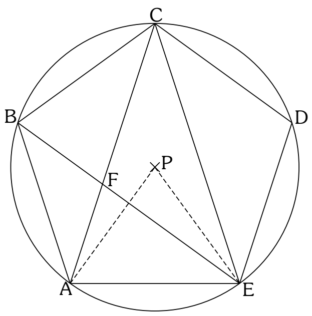
Tällöin saadaan toisen asteen yhtälö

$$b^2+b-1=0, \qquad (2)$$

josta b:n arvoksi tulee ratkaisukaavalla

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \qquad (3)$$

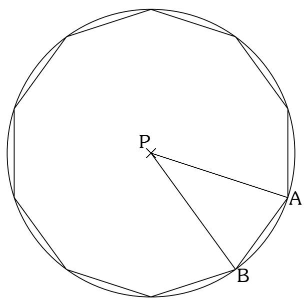
Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista ympyrän sisään piirrettyä säännöllistä viisikulmiota ABCDE ja yritetään aluksi osoittaa, että kolmiot ΔBCF ja ΔACE ovat yhdenmuotoisia.



Kolmio ΔACE on tasakylkinen, ovathan sen sivut saman pituisia viisikulmion lävistäjiä. Sen huippukulman ∠ACE suuruus on 36°, sillä kyseistä kehäkulmaa vastaava keskuskulma ∠APE on viidesosa täysikulmasta eli 72°. Kulma ∠CEB on luonnollisesti yhtä suuri kuin kulma ∠ACE, joten kulman ∠EFC suuruus on $180°-2{\cdot}36°=108°$. Kulman ∠CFB suuruudeksi saadaan siis $180°-108°=72°$, joka on sama kuin vastinkulman ∠CEA asteluku. Kulma ∠FBC on yhtä suuri kuin kulma ∠EAC eli 72°. Kolmioilla ∠BCF ja ∠ACE on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoiset.

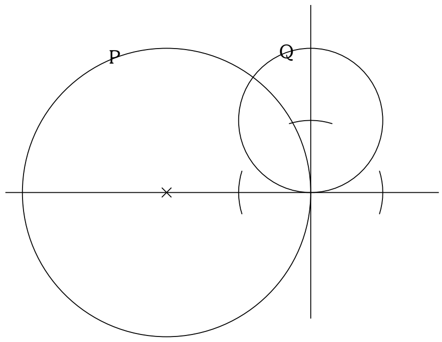
Merkitään $|\overline{AC}|=|\overline{BE}|=a$ ja $|\overline{BC}|=|\overline{AE}|=b$. Koska symmetrian perusteella $|\overline{FE}|=|\overline{FC}|=|\overline{BC}|$, janan $\overline{BF}$ pituus on $a-b$. Nyt voidaan muodostaa yhdenmuotoisten kolmioiden sivuista verranto (1) — viisikulmion sivu on siis kultaisen leikkauksen suhteessa lävistäjään! Lisäksi voidaan todeta, että ”kultaisessa kolmiossa” eli tasakylkisessä kolmiossa, jonka huippukulma on 36°, kanta on kultaisen leikkauksen suhteessa kylkeen.

Tutkitaan seuraavaksi viisikulmion lähisukulaista, säännöllistä kymmenkulmiota.

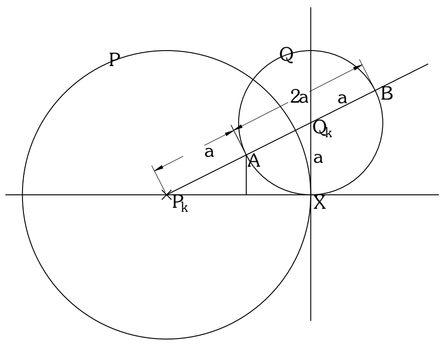


Koska kulma ∠BPA on kymmenesosa täysikulmasta eli 36°, kolmio ΔABP on ”kultainen kolmio”. Kun siirretään kymmenkulmion sivu $\overline{AB}$ janalle $\overline{AP}$ (joka on monikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde), huomataan eräs tapa piirtää viisikulmio. Jos nimittäin onnistutaan jakamaan ympyrän säde kultaisen leikkauksen suhteessa, on helppoa piirtää säännöllinen kymmenkulmio — ja poistamalla joka toinen kymmenkulmion kärkipiste saadaan säännöllinen viisikulmio.

Tuumasta toimeen eli harppi ja viivoitin käteen ja piirtämään. Geometrisen piirtämisen perusteita en tässä käsittele, koska ne löytyvät geometrian oppikirjoista. Aluksi piirretään ympyrä P ja pienempi ympyrä Q, jonka halkaisija on P:n säde, ja joka sivuaa P:n sädettä P:n kehällä. Tätä varten puolitetaan ympyrän P säde ja piirretään sille normaali kehän pisteen X kautta. Ympyrän Q keskipiste on tällä normaalilla, ympyrän P säteen puolikkaan etäisyydellä pisteestä X.



Tarkastellaan kuviota, joka syntyy, kun piirretään ympyröiden P ja Q keskipisteiden kautta kulkeva suora.

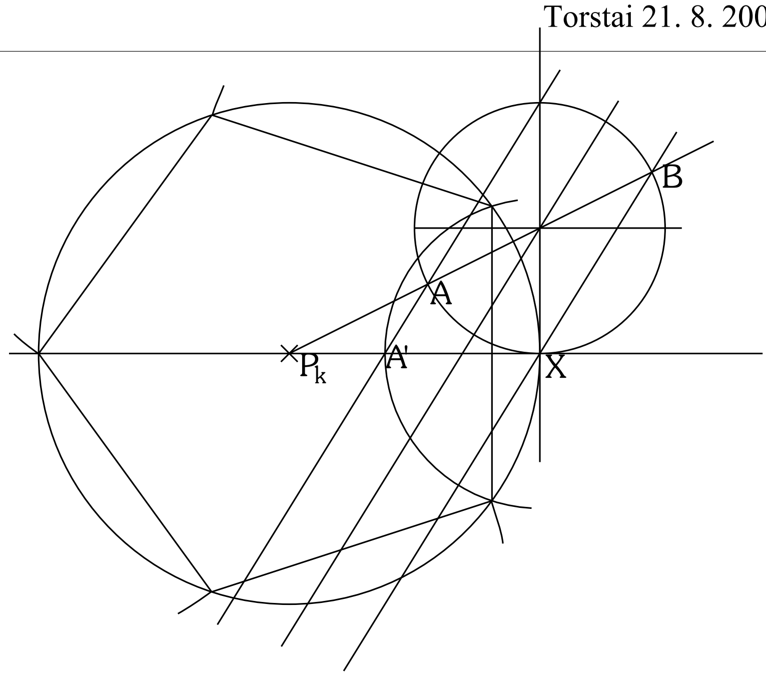


Olkoon ympyrän P säde $2a$. Janan $\overline{P_kQ_k}$ pituus saadaan Pythagoraan lauseella: se on

$$\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a. \qquad (4)$$

Janan $\overline{P_kA}$ pituudeksi tulee

$$\sqrt{5}a-a=(\sqrt{5}-1)a. \qquad (5)$$



Lasketaan janan $\overline{P_kA}$ suhde janaan $\overline{AB}$:

$$\frac{(\sqrt{5}-1)a}{2a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (6)$$

Janat ovat kultaisen leikkauksen suhteessa.

Nyt on saatu aikaan kultaisen leikkauksen suhde. Se täytyy vain projisoida ympyrän P säteelle, niin ongelma on ratkaistu. Tämä tehdään siten, että piirretään suora pisteiden B ja X kautta, sekä sen kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen A kautta. Seuraavaksi isketään harpin kärki pisteeseen X, otetaan säteeksi $\overline{XA'}$ ja piirretään ympyrä. Yhdistämällä ympyrän P ja uuden ympyrän leikkauspisteet saadaan säännöllisen viisikulmion sivu. Kun erotetaan harpilla sen pituisia pätkiä ympyrän kehältä, saadaan kokonainen säännöllinen viisikulmio.

Teemu Varis

Kultainen leikkaus lat. se tio aurea a
a a a a a a a
b aa a a a aa
a a a a a a a
a a a aa E a a a
a a aa A Elementa
a a
a a E a a a a
F b a a a $F_{0,1}$ F_n F_{n-1} F_{n-2} a
a a a a
a a a a a a
a a a a aa a a
a a a a a a a
a aa a a a a a
aa aa a a a a a
a a
a a a aa a
a
aa a a a a a a a a
A a a a aa a a
a a a a a a
a a a a a