

Julian joukot

fraktaaleja kompleksitasolla

Luonnossa esiintyy joka puolella äärimmäisen monimutkaisia ja kauniita muotoja, jotka jatkuvasti toistavat itseään eri mittakaavoissa. Niitä löytyy niin vuorista ja meren aalloista, kuin elävästä luonnostakin, kuten puiden oksistoista ja sammalkasvustoista. Vielä ihmeellisempää on, että yksi puhtaasti matemaattinen lauseke saattaa sisältää aivan yhtä monimutkaisia ja kauniita rakenteita. Rationaalifunktioiden muodostamien dynaamisten systeemien tarkastelulla kompleksitasolla ei vaikeuta olekaan mitään tekemistä taiteen kanssa, mutta sen jälkeen, kun ranskalainen matemaatikko Benoit B. Mandelbrot teki tällaiset systeemit tunnetuiksi, on niiden kuvia esiintynyt enemmän taiteilijoiden kuin matemaatikoiden töissä. Näiden kuvien tuottamiseen käytettävä sääntö on niin yksinkertainen, että kuka tahansa pystyy tietokoneellaan tuottamaan niitä. Ne ovat kuitenkin niin monimutkaisia, että maailmassa tuskin on ketään, joka pystyisi todella ymmärtämään niitä. Siksi on kiehtovaa tarkastella lähemmin näiden kuvien taustalla olevaa matematiikkaa.

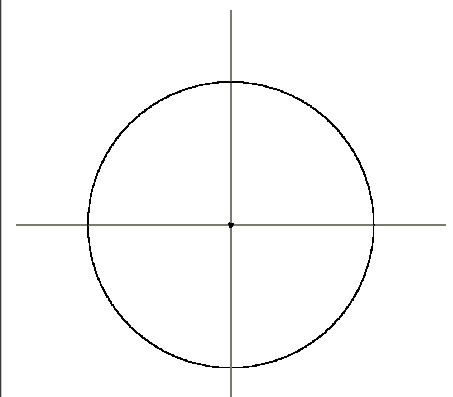
Dynaaminen systeemi

Dynaamisella systeemillä tarkoitetaan muuttuvaa matemaattista tai fysikaalista systeemiä, jos-

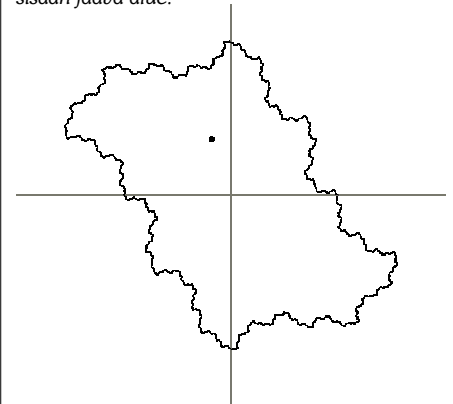
sa jokainen tila riippuu sitä edeltävästä tilasta. Jos systeemillä on erilisiä peräkkäisiä tiloja, sitä kutsutaan diskreetiksi. Tällöin systeemiä voidaan usein kuvata kaavalla, joka kertoo, miten edellisestä tilasta saadaan seuraava. Systeemi voi olla myös jatkuva, jolloin sitä kuvataan yleensä differentiaaliyhtälöllä. Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa, jolle pätee $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2$. Kun merkitään lukujonon ensimmäistä jäsentä z_0 :lla, saadaan jono $z_0, z_1 = z_0^2, z_2 = z_0^4, z_3 = z_0^8, \dots$. Lukujonon käyttäytyminen riippuu valitusta alkuarvosta z_0 . Jos $|z_0| < 1$, jono lähestyy nollaa kun n lähestyy ääretöntä. Tätä merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Jos taas $|z_0| > 1$, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, ja jos $|z_0| = 1$, niin $|z_n| = 1$ kaikille n :n arvoille. Reaaliluvuille tällainen käyttäytyminen on helppoa ymmärtää, mutta sama pätee myös kompleksiluvuille. Alkupisteet, joiden pohjalta tuotetut lukujonot eivät lähene nollaa eivätkä ääretöntä muodostavat siis kompleksitasolle origokeskeisen yksikköympyrän. Tätä pistejoukkoa kutsutaan funktion f Julian joukoksi. Merkitsemme sitä $J(f)$. Nimi on annettu ranskalaisen matemaatikon Gaston Julian (1893–1978) mukaan, joka määritteli joukon 1918 [6]. Julian joukko voidaan muodostaa mille tahansa funktiolle, jonka määrittelyjoukko on sama kuin sen arvojoukko. Tunnetuin esimerkki ovat Julian joukot

funktiolle muotoa $p_c(z) = z^2 + c$, jonka erikoistapausta $c=0$ äsken tarkastelimme. Julian työtoverina oli Pierre Fatou, jonka mukaan niiden pisteiden joukkoa, jotka eivät kuulu Julian joukkoon, kutsutaan Fatoun joukoksi.

Tässä artikkelissa käsitellään lähinnä muotoa $p_c(z) = z^2 + c$ olevien funktioiden Julian joukko-



Kuva 1: Julian joukot funktioille $p_0(z) = z^2$ (yllä) ja $p_{0.5i}(z) = z^2 + 0.5i$ (alla). Kummankin funktion attraktiivinen kiinteä piste on merkitty. Sen attraktion altaaseen kuuluu Julian joukon sisään jäävä alue.



ja. Jatkossa käytämme tätä merkin-
tää (p_c) näille funktioille. Edellises-
sä esimerkissä tarkasteltiin siis
funktioita p_0 .

Muutetaan nyt äskeistä esi-
merkkiä siten, että lisätään z :aan
joka välissä jokin pieni vakio esim.
 $c=0,5i$. Nyt pienet z :n arvot eivät
enää lähenekään nollaa, vaan pist-
tettä, jonka likiarvo on
 $-0,136+0,393i$. (Tämä piste on yh-
tälön $z=z^2+0,5i$ reaaliakselin ylä-
puolella oleva ratkaisu) Julian
joukkokaan ei ole enää ympyrä,
vaan monimutkainen, itseään tois-
tava fraktaalinen käyrä. (ks. kuva
1)

Äskeisissä esimerkeissä käy-
tetyt kaltaista laskutoimituksen
toistoa kutsutaan iteroinniksi.
Funktion f :n:nelle iteraatiolle on
käytössä merkintätapa

$$f^n(x) = f(f(\dots f(x)\dots)),$$

missä f esiintyy n kertaa. Merkin-
nällä ei siis ole mitään tekemistä
potenssiin korottamisen kanssa.
 f :n käänteisfunktioita merkitään
käyttäen funktiolaskimista tuttua
merkintää f^{-1} . Näin voidaan laajen-
taa iteraation käsite kaikille koko-
naisluville, kun määritellään, että
 $f^n = (f^{-1})^n$ ja että $f^0(x) = x$ kaikille
funktioille f . Iteraatioluvuilla voi-
daan nyt laskea kuten potensseil-
la: $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ ja $(f^n)^m = f^{nm}$ riip-
pumatta siitä, ovatko m ja n nega-
tiivisia vai positiivisia.

Kompleksifunktioiden ite-
roinnin yhteydessä puhutaan
usein kiertoradoista. Kompleksi-
tason pisteen z positiivisella kierto-
radalla tarkoitetaan niiden pistei-
den joukkoa, jotka tulevat vastaan
jotakin funktiota iteroitaessa. Mer-
kitsemme positiivista kiertorataa:

$$O^+(z) = \{f(z), f^2(z), f^3(z), \dots\}.$$

Negatiiviseksi kiertoradaksi kutsu-
taan vastaavasti joukkoa:

$$O^-(z) = \{f^{-1}(z), f^{-2}(z), f^{-3}(z), \dots\}.$$

Negatiivisten kiertoratojen yh-
teydessä on kuitenkin muistettava,
että jos funktion aste on suurempi
kuin yksi, on sen käänteisfunktioi-

Kompleksiluvut lyhyesti

Perinteisessä matematiikassa yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua. Voimme kuiten-
kin kuvitella sille ratkaisun, vaikka sitä ei todellisuudessa olisikaan olemassa. Tätä ratkai-
sua kutsutaan imaginääriyksiköksi, ja sitä merkitään i :llä. Yhtälön toinen ratkaisu on $-i$.
Imaginääriyksikköä voidaan käsitellä kuten mitä tahansa lukua. Näin voidaan laskea
esim. että $\sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{2}i$. Lukuja, joissa i on tekijänä kutsutaan imaginääriluvuik-
si. Imaginäärilukuja ja reaaliukuja voidaan myös laskea yhteen, mutta tällaiset luvut täy-
tyy kuitenkin aina esittää kahdessa osassa. Lukuja, joissa on sekä reaali- että imaginää-
riosa kutsutaan kompleksiluvuiksi. Kompleksilukuja ovat esimerkiksi $2-7,4i$ ja $5,3+i$
sekä $\sqrt{17}+1+2\pi^2i$.

Kompleksiluvuillakin voidaan laskea, kuten kaikilla luvuilla. Seuraavat peruslas-
kusäännöt on helppo johtaa:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = ac + iad + ibc + bdi^2 = ac - bd + i(ad+bc)$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Kerto- ja jakolaskussa käytetään hyväksi tietoa, että $i^2 = -1$.

Nykyään on yleisesti käytössä
tapa esittää kompleksiluvut pisteinä ns.
kompleksitasolla, jossa vaakasuuntaan
kulkee reaali- ja pystysuuntaan imaginää-
riakseli. Oikeanpuoleisessa kuvassa nä-
kyy luku $2,5 + 3i$ kompleksitasolle piirret-
tynä. Kompleksitasolle käytetään tunnus-
ta $\mathbb{C}$.

Edellä kompleksiluvut on esitetty
kahtena komponenttina. Kompleksiluku
on aina yksikäsitteisesti määritelty, kun
sen reaali- ja imaginääriosat on määritel-
ty. Tämän lisäksi käytössä on toinenkin
tapa määritellä kompleksiluku: itseisar-
vonsa ja argumenttinsa avulla. Kompleksi-
luvun itseisarvolla tarkoitetaan samaa,
kuin reaalioluvuillakin, eli etäisyyttä origos-
ta. Kun kompleksiluku on esitetty kom-
ponenttimuodossa, sen itseisarvon laskemiseksi tarvitaan Pythagoraan lausetta:

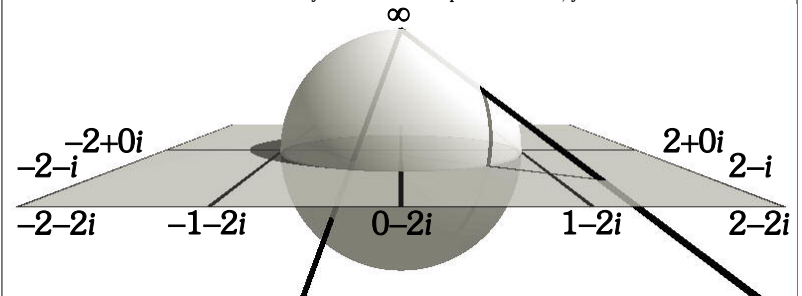
$|a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kuvaan merkityn kompleksiluvun itseisarvo on siis $|2,5+3i| = \frac{\sqrt{61}}{2}$. Argu-
mentilla tarkoitetaan vastapäivään kiertuvaa kulmaa, jonka origosta lukuun piirretty jana
muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa. Kuvassa argumentti on merkitty θ :lla. Argu-
mentin laskemiseksi komponenttimuodosta tarvitaan trigonometriaa:

$\arg(a+ib) = \arctan(b/a)$. Argumentti ilmoitetaan yleensä radiaaneina. Myös itseisarvo ja
argumentti määrittelevät kompleksiluvun yksikäsitteisesti. Kompleksiluku z , jonka it-
seisarvo on r ja argumentti θ on:

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$$

Jälkimmäinen merkintätapa saattaa näyttää erikoiselta, mutta se pitää paikkaan-
sa. Voidaan tosiaan osoittaa, että yhtälön $z = e^{i\theta}$ ratkaisu on kompleksiluku, jonka itseisar-
vo on yksi ja argumentti θ . Tämä on kaikkein tavallisin tapa ilmaista kompleksiluku po-
laarisessa muodossa. Tästä erikoistapauksena on Leonhard Eulerin (1707–1783) esittä-
mä "matematiikan kaunein kaava": $e^{i\pi} = -1$, jossa yhdistyvät hienosti kolme matemati-
kassa ehkä kaikkein tärkeintä lukua.

Reaaliolukujen yhteydessä puhutaan positiivisesta ja negatiivisesta äärettömästä.
Kompleksitasolla on kuitenkin vain yksi ääretön. Tätä havainnollistaa tapa esittää kom-
pleksitaso ns. Riemannin pallona. Alla olevassa kuvassa on esitetty projektiotason ja pal-
lon välillä. Pallon "pohjoisnavalla" sijaitsee ääretön, ja "etelänavalla" luku 0. Muut pis-
teet projisoidaan pallolle piirtämällä suora äärettömän, ja tasolla olevan pisteen kautta.
Suora leikkaa pallon projektiopisteessä. Tällöin argumentti vastaa itse asiassa pituuspii-
riä. "Päiväntasaajalle" kuvautuu origokeskeinen yksikköympyrä. Kompleksitasoa, jossa
ääretön on mukana kutsutaan laajennetuksi kompleksitasoksi, ja merkitään $\bar{\mathbb{C}}$.



la useita arvoja. Tällöin negatiivinen kiertorata koostuu kaikista mahdollisista käänteisfunktioiden arvoista. Ts. pisteen z negatiiviseen kiertorataan kuuluvat kaikki ne pisteet, joiden positiiviseen kiertorataan z kuuluu.

Jaksolliset pisteet

Kuten edellä olevassa esimerkissä havaittiin, pisteen 0 positiivinen kiertorata funktiota p_0 iteroitaessa pysyy nollassa, sillä $p_0(0)=0$. Yleisesti jos $f(z_0)=z_0$ jollekin funktiolle $f(z)$, sanotaan z_0 :aa f :n kiinteäksi pisteeksi. Joillakin funktioilla on myös ns. jaksollisia pisteitä, eli pisteitä joille

$$z_0 = f^n(z_0) \quad (1)$$

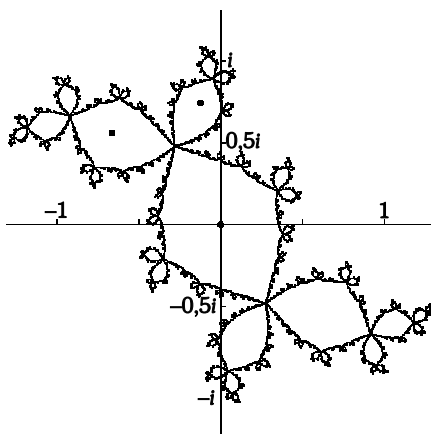
jollekin positiiviselle kokonaisluvulle n . Tällöin voidaan myös sanoa pisteen positiivisen kiertoradan olevan jaksollinen. Pienintä n :n arvoa, joilla (1) toteutuu kutsutaan kiertoradan jaksoksi. Kaavasta (1) seuraa myös, että

$$f^k(z_0) = f^{k+n}(z_0) \quad (2)$$

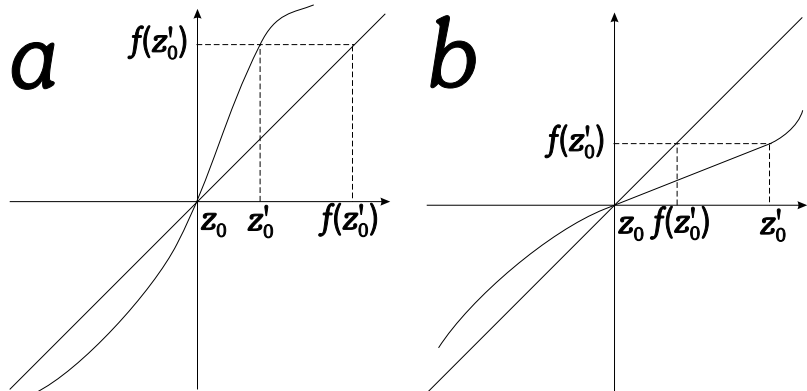
Kaikkille positiivisille kokonaisluvuille k .

Esimerkiksi kun c toteuttaa yhtälön $(c^2 + c)^2 + c = 0$, eli kun $c \approx -0,122561 + 0,744861i$, niin piste 0 kuuluu jaksolliseen sykliin, jonka jakso on 3:

$$p_c^0(0) = 0$$



Kuva 3: Julian joukko funktiolle $p_c(z) = z^2 - 0,122561 + 0,744861i$. Jaksollinen kiertorata on merkitty mustilla pisteillä. Julian joukon sisäpuolelle jäävä alue muodostaa sen attractorin alttaan.



Kuva 2: Funktion derivaatan vaikutus kiinteän pisteen (z_0) luonteeseen. Ja sen lähellä sijaitsevan pisteen (z'_0) positiiviseen kiertorataan.

a: Jos $|f'(z_0)| > 1$, niin $f(z'_0)$ sijaitsee kauempana z_0 :sta kuin z'_0 .

b: Jos taas $|f'(z_0)| < 1$, niin $f(z'_0)$ sijaitsee lähempänä z_0 :aa kuin z'_0 .

Huomaa, että kuvaajien molemmat akselit ovat reaaliakseleita. Vaaka-akseli kuvaa funktion argumenttia ja pystyakseli sen arvoa.

$$p_c^1(0) \approx -0,122561 + 0,744861i$$

$$p_c^2(0) \approx -0,662359 + 0,562280i$$

$$p_c^3(0) = 0$$

$$p_c^4(0) \approx -0,122561 + 0,744861i$$

$$p_c^5(0) \approx -0,662359 + 0,562280i$$

jne...

Tämä sykli on merkitty kuvan 3.

Pisteitä, jotka eivät ole jaksollisia, mutta joiden kiertoradat päätyvät jaksolliseen silmukkaan äärellisen iteraatiomäärän jälkeen kutsutaan esijaksollisiksi. Tällainen on edellisen esimerkin funktiolle esimerkiksi piste $0,122561 - 0,744861i$. Se on c :n arvon vastaluku, joten sen neliö on sama kuin c :n. Jo ensimmäisellä iteraatiolla päästään siis edellä esitettyyn sykliin. Lisää tällaisia pisteitä löydetään funktion käänteisfunktioita käyttämällä.

Attraktiiviset ja repulsiiviset pisteet

Jos iteroitava funktio on jatkuva ja derivoituva, on luonnollista, että sen kiinteiden pisteiden lähettävillä sijaitsevat pisteet käyttäytyvät lähes kiinteän pisteen tavoin. Se, miten kiertorata poikkeaa kiinteän pisteen kiertoradasta, riippuu kyseisen kiinteän pisteen luonteesta.

1) Funktion derivaatta pisteessä z_0 tarkoittaa sen kulmakerrointa tuossa pisteessä. Sitä merkitään $f'(z_0)$.

ta. Joissakin tapauksissa läheltä valitun pisteen kiertorata lähenee pikkuhiljaa kiinteää pistettä, eli mitä pidemmälle iteroidaan, sitä lähemmäksi kiertoradan pisteet tulevat kiinteää pistettä. Toisissa tapauksissa kiertorata taas etääntyy kiinteästä pisteestä. Kiinteitä pisteitä, joiden ympärillä kiertoradat käyttäytyvät ensin mainitulla tavalla kutsutaan attraktiivisiksi, ja jälkimmäisellä tavalla käyttäytyviä repulsiivisiksi. Jos kiertorata ei etäänny, eikä lähesty kiinteää pistettä, vaan pysyy suhteellisesti ottaen samalla etäisyydellä, sanotaan pisteen olevan neutraali. Pisteen luonteen tarkka määrittäminen edellyttää iteroitavan funktion derivaatan laskemista kyseisessä pisteessä.

Kompleksifunktio voidaan derivoida samoin menetelmin kuin reaali-funktio. Sen derivaatta on myös kompleksifunktio, jonka reaali- ja imaginääriosia vastaavat alkuperäisen funktion reaali- ja imaginääriosien muutosnopeuksia kussakin pisteessä.

Kiinteät pisteet (z_0) luokitellaan yleensä funktion derivaatan¹⁾ ($\lambda = f'(z_0)$) perusteella seuraavasti:

$$|\lambda| = 0 \quad \text{superattraktiivinen}$$

$$0 < |\lambda| < 1 \quad \text{attraktiivinen}$$

$$|\lambda| = 1 \quad \text{neutraali}$$

$$|\lambda| > 1 \quad \text{repulsiivinen}$$

Kuva 2 havainnollistaa derivaatan merkitystä. Myös useamman pisteen syklille voidaan määritellä vastaava ominaisuus. Tällöin tarkastellaan vastaavasti derivaattaa $\lambda = (f^k)'(z_0)$, missä k on syklin jakso. Esimerkiksi attraktiivisen syklin ympärillä olevien pisteiden kiertoradat lähenyvät sykliä siten, että joka k :s piste lähenee jotakin tiettyä syklin pistettä ts. ne kiertoradan pisteet z_n , joille $n \bmod k$ on sama, lähenyvät samaa syklin pistettä.

Attraktiivisille sykleille ja kiinteille pisteille voidaan määritellä ns. attraktion allas. Sillä tarkoitetaan kaikkien niiden pisteiden joukkoa, joiden kiertoradat lähenyvät ko. kiinteää pistettä tai sykliä, kun iteraatioluku lähestyy ääretöntä. Merkitsemme pisteen z_0 attraktion allasta $A_f(z_0)$. Esimerkiksi kuvassa 1 kiinteän pisteen attraktion allas on Julian joukon sisään jäävä alue.

Alussa tarkastellussa esimerkissä Julian joukko oli siis äärettömän attraktion altaan reuna:

$$J(f) = \partial A_f(\infty), \quad (2)$$

missä ∂ tarkoittaa reunaviivaa. Tätä määritelmää voidaan kuitenkin käyttää vain funktioille, joille ∞ on kiinteä piste. Se voidaan yleistää seuraavasti:

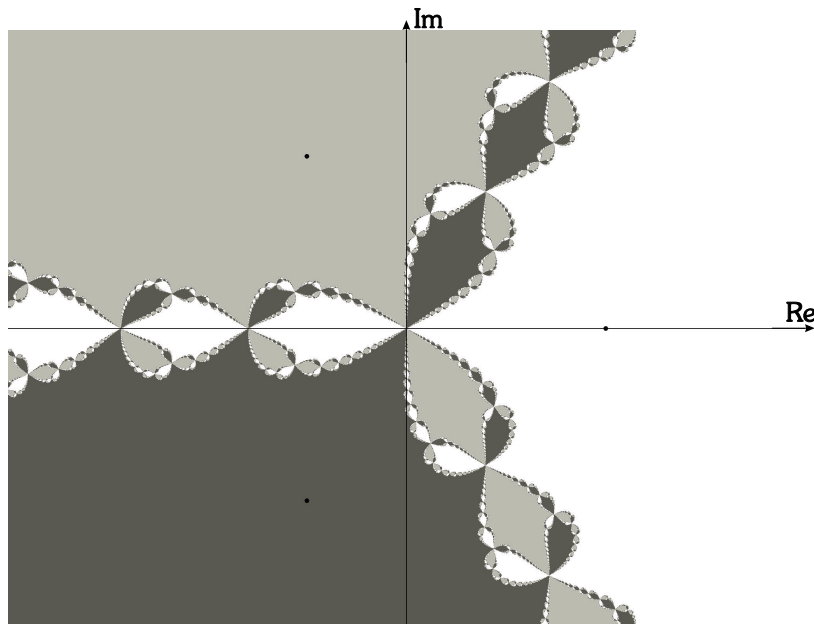
$$J(f) = \partial A_f(z_0), \quad (3)$$

missä z_0 on jokin attraktiivinen kiinteä piste.

Kaavan (3) määrittelemä joukko on todellakin riippumaton kiinteän pisteen z_0 valinnasta. Voidaan todellakin osoittaa, että mikäli funktiolla on useita kiinteitä pisteitä, niiden kaikkien attraktion altailla on yhteinen reuna. Tällainen Julian joukko on esitetty kuvassa 4.

Koska attraktion altaaseen ei luonnollisesti voi kuulua attraktorin lisäksi muita kiinteitä tai jak-

2) Tämä ei ole Julian joukon alkuperäinen määritelmä, vaikka se lieneekin yleisimmin käytetty. Alkuperäinen määritelmä löytyy esim. lähteistä [1] tai [14]. Se voidaan osoittaa tässä esitetyn kanssa yhtäpitäväksi.



Kuva 4: Julian joukko funktiolle $f(z) = z - (z^3 - 1)/(3z^2)$. Kuvaan on merkitty kolme attraktiivista kiinteää pistettä 1 ja $-0,5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, sekä niiden attraktion altaat ei harmaan sävyillä. Kaikilla attraktion altailla on yhteinen reunaviiva, joka on funktion f Julian joukko.

sollisia pisteitä, seuraa tästä luonnollisesti, että kaikki repulsiiviset kiinteät pisteet kuuluvat Julian joukkoon. Julian joukko voidaan myös määritellä repulsiivisten pisteiden avulla:

Funktion f Julian joukko on f :n kaikkien repulsiivisten periodisten pisteiden muodostaman joukon sulkeuma.²⁾

Joukon S sulkeumalla tarkoitetaan pienintä suljettua joukkoa, joka sisältää joukon S . Sitä merkitään $\bar{S}$. Sulkeuma voidaan määritellä myös siten, että se on joukon ja sen reunalla sijaitsevien pisteiden yhdiste. Siihen kuuluvat siis kaikki pisteet, jotka joko kuuluvat alkuperäiseen joukkoon S , tai joille on mielivaltaisen läheltä löydettävissä piste, joka kuuluu joukkoon S . Esimerkiksi reaalilukujen joukko on rationaalilukujen joukon sulkeuma. Itse asiassa myös laajennettu kompleksitaso $\bar{\mathbb{C}}$ on kompleksitason $\mathbb{C}$ sulkeuma.

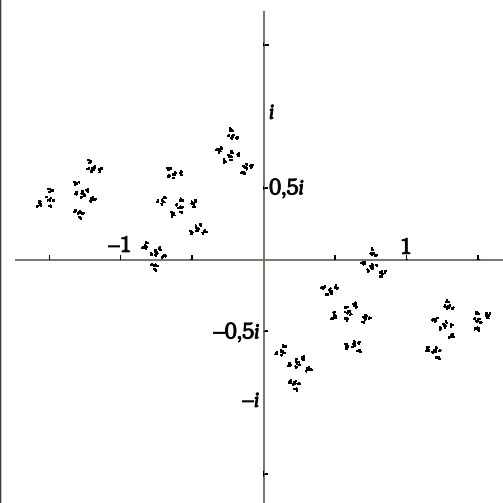
Sulkeuman määritelmästä seuraa, että S on tiheä $\bar{S}$:ssä ts. minkä tahansa kahden pisteen, jotka kuuluvat joukkoon $\bar{S}$ välillä on kolmas piste, joka kuuluu joukkoon S . Mikä tahansa Julian joukko on siis "täynnä" repulsiivisia

jaksollisia pisteitä.

Tämä on kaikkein yleisimmin käytetty Julian joukon määritelmä. Sen avulla voidaan määritellä Julian joukko sellaisillekin funktioille, joilla ei ole attraktiivisia kiinteitä pisteitä. Mikäli kiinteä piste kuitenkin löytyy, on tämä määritelmä yhtäpitävä kaavan (3) kanssa.

Repulsiiviset pisteet siis kuuluvat Julian joukkoon ja attraktiiviset eivät. Neutraaleille pisteille asia ei ole niin yksinkertainen. Ne kuuluvat Julian joukkoon, jos niiden

Kuva 5: Tyypillinen epäyhtenäinen Julian joukko ($c = -0,8 - 0,8i$)



derivaatan argumentti jaettuna 2π :llä on rationaaliluku, mutta eivät kuulu, jos se on irrationaaliluku. ks. tarkemmin [11].

Edellä mainittujen lisäksi Julian joukoilla on seuraavia ominaisuuksia:

- Julian joukko sisältää ylinumeroituvan määrän pisteitä. Ts. Julian joukon pisteitä ei voi numeroida luonnollisilla luvuilla. Ne voidaan sen sijaan numeroida reaalityluilla. [11]
- Minkä tahansa Julian joukkoon kuuluvan pisteen positiivinen ja negatiivinen kiertorata kuuluvat myös Julian joukkoon.
- Minkä tahansa Julian joukkoon kuuluvan pisteen negatiivinen kiertorata on tiheä Julian joukossa.
- Julian joukko $J(f)$ on invariantti funktiossa f . Ts. Kun kaikille Julian joukon pisteille suoritetaan funktio f , saadaan uusi joukko, joka on sama kuin alkuperäinen Julian joukko.
- Minkä tahansa jossakin attraktion altaassa sijaitsevan pisteen negatiivinen kiertorata lähenee Julian joukkoa, kun iteraatiomäärä lähenee ääretöntä.

Toisen asteen polynomeja

Kaikkein tutkituimpia ovat Julian joukot toisen asteen polynomeille, eli funktioille, jotka ovat muotoa:

$$f(z) = az^2 + bz + d. \quad (4)$$

Tällaisia funktioita näyttäisi olevan varsin laaja valikoima, sillä kaavassa on kolme kompleksista vakiota, joille voidaan antaa eri arvoja. Ongelma on kuitenkin yksinkertaisempi, kuin miltä näyttää. Mikä tahansa muotoa (4) olevan funktion Julian joukko voidaan nimittäin muuttaa jonkin muotoa

$p_c = z^2 + c$ olevaksi Julian joukoksi pelkästään muuttamalla sen kokoa, pyörittämällä ja siirtämällä sitä kompleksitasolla [1]. Tämä muunnos voidaan esittää funktiona

$$M(z) = uz + v.$$

Väitämme nyt, että mikä tahansa funktion f iteraatioaskel voidaan suorittaa siten, että kuvataan lähtöpiste funktiolla M toiseen paikkaan, sen jälkeen suoritetaan vastaava iteraatioaskel funktiolla p ja kuvataan saatu piste takaisin funktiolla M^{-1} . Toisin sanoen:

$$\begin{aligned} f(z) &= M^{-1}(p(M(z))) \\ &= M^{-1}(p(uz+v)) \\ &= M^{-1}((uz+v)^2 + c) \\ &= M^{-1}(u^2z^2 + 2uvz + v^2 + c) \end{aligned}$$

Ja koska M :n käänteisfunktio on $M^{-1} = (z-v)/u$, niin

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(u^2z^2 + 2uvz + v^2 + c) - v}{u} \\ &= uz^2 + 2vz + \frac{v^2 - v + c}{u}, \end{aligned}$$

mikä on selvästikin samaa muotoa kuin (4). Vakiot voidaan nyt valita siten, että $a=u$, $b=v$ ja $d = \frac{v^2 - v + c}{u} \Leftrightarrow c = ad - b^2 + b$. Kun iteraatioita suoritetaan useita peräkkäin, voidaan muunnosfunktiot jättää välistä pois:

$$\begin{aligned} f^2(z) &= M^{-1}(p(M(M^{-1}(p(M(z)))))) \\ &= M^{-1}(p(p(M(z)))) \\ &= M^{-1}(p^2(M(z))) \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että z kuuluu funktion f Julian joukkoon jos ja vain jos $M(z)$ kuuluu vastaavan funktion p_c Julian joukkoon. Näin ollen voidaan ymmärtää kaikkia toisen asteen Julian joukkoja pelkästään funktiota p_c tutkimalla.

Paraabeleilla on vastaava ominaisuus: Muotoa $y = az^2 + bz + d$ olevan reaalfunktion kuvaaja on paraabeli, jonka huippu voi sijaita missä tahansa pisteessä. Siirtämällä ja kokoa muuttamalla se voidaan kuitenkin muuttaa paraabeliksi, jonka yhtälö on muotoa

$$y = ax^2.$$

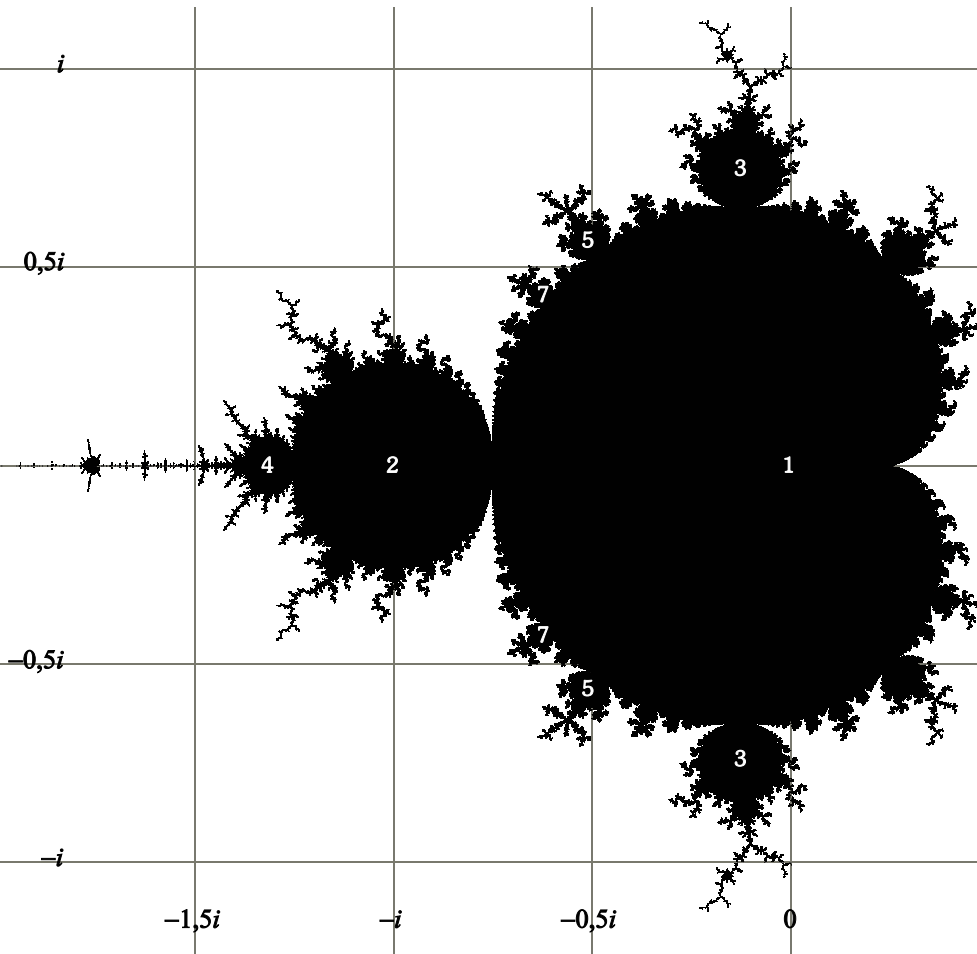
Toisen asteen Julian joukoilla on mm. seuraavia ominaisuuksia:

- Kaikki toisen asteen Julian joukot ovat symmetrisiä pisteen suhteen. Funktioiden p_c Julian joukot ovat symmetrisiä origon suhteen.
- Toisen asteen Julian joukot ovat joko yhtenäisiä, tai ns. Cantorin joukkoja, eli ne koostuvat äärettömästä määrästä irrallisia pisteitä.
- Funktiolla p_c on enintään yksi äärellinen attraktori, joka voi olla joko sykli tai kiinteä piste. Voidaan nimittäin osoittaa, että, että jokaiseen attraktion altaaseen kuuluu vähintään yksi ns. kriittinen piste. Funktioiden kriittisellä pisteellä tarkoitetaan pistettä, jossa funktion derivaatta on nolla, tai sitä ei ole. Toisen asteen funktiolla on kaksi kriittistä pistettä: ääretön, sekä derivaatan nollakohdasta (Yhtälöllä $D(az^2 + bz + d) = 2az + b = 0$ on vain yksi ratkaisu.) [1]

Fraktaalisuus ja kaaottisuus

Fraktaalilla tarkoitetaan kohdetta, jonka monimutkaisuus ei riipu tarkastelumittakaavasta. Esimerkiksi alempi kuvan 1 esittämästä Julian joukoista on fraktaali, sillä mikä tahansa sen osa näyttää suurennettuna yhtä monimutkaiselta kuin alkuperäinen joukko. Toisaalta esimerkiksi ympyrä ei ole fraktaali, sillä mitä enemmän jotakin sen kohtaa suurennetaan, sitä enemmän se muistuttaa suoraa viivaa. Fraktaaleista tarkemmin ks. esim. [15], [7] tai [5].

Jo Julia ja Fatou [6] olivat tietoisia monien Julian joukkojen fraktaalista ominaisuuksista, vaikka heidän aikanaan ei ollut käytävissä tarpeeksi tehokkaita tietokoneita, jotta joukoista olisi voitu tuottaa kuvia.



Kuva 6: Mandelbrotin joukko. Komponenttien sisälle merkityt luvut kertovat montako pistettä on funktion $p_c(z)=z^2+c$ attraktiivisessa syklistä, kun c sijaitsee jossakin kyseisen komponentin sisällä.

Esimerkiksi jo kaavasta (3) seuraa, että jos funktiolla on vähintään kolme attraktiivista kiinteää pistettä, sen Julian joukko on väistämättä fraktaalinen. Kaikkien Julian joukon pisteiden täytyy nimittäin sijaita kaikkien kolmen attraktiivon altaan kohtaamispisteissä. Tästä seuraa, että jos jollakin alueella näyttäisi olevan kahdella attraktiivon altaalla yhteinen reunaviiva, on tässä välissä väistämättä sijaittava pala kolmannen attraktorin alasta. Jos näin ei olisi, tuossa kohdassa olisi pala Julian joukkoa, joka ei olisi kolmannen altaan reunalla. Ks. kuva 4.

Kaikille Julian joukoille pätee myös, että jos otetaan mikä tahansa jonkin ympyrän rajaama osajoukko Julian joukosta $J(f)$, ja suoritetaan sille funktiota f tarpeeksi monta kertaa, se peittää lopulta koko Julian joukon. Merkitään

tätä Julian joukon osajoukkoa W :llä. Tällöin on olemassa jokin sellainen luonnollinen luku n , että

$$f^n(W)=J(f).$$

f^n on kaikkialla jatkuva ja derivoituva, mistä seuraa, että koko Julian joukon rakenne esiintyy myös yhdessä sen palasessa. Tämä ei kuitenkaan välttämättä tarkoita, että joukko olisi fraktaalinen. Esimerkiksi funktion p_c Julian joukoista tapaukset $c=0$ (origokeskeinen yksikköympyrä) ja $c=-2$ (jana -2 :sta 0 :aan) eivät ole fraktaaleja. [14]

Joukon fraktaalisuutta mitataan yleensä ns. Hausdorff-dimensiolla [15]. Se on luku, joka on sitä suurempi, mitä fraktaalisempi joukko on. Mikäli joukko ei ole lainkaan fraktaalinen sen dimensio on yhtä suuri kuin sen topologisen dimensio (esim. käyrälle 1 pin-

nalle 2 jne.). Julian joukoille Hausdorff-dimension tarkka määrittäminen on vaikeaa, mutta sitä voidaan arvioida kokeellisesti piirtämällä kuva joukosta, ja mittaamalla sitä eri tarkkuuksilla [14] [15]. Funktion p_c Julian joukoille, kun c on tarpeeksi pieni, voidaan laskea likiarvoja kaavalla [13]:

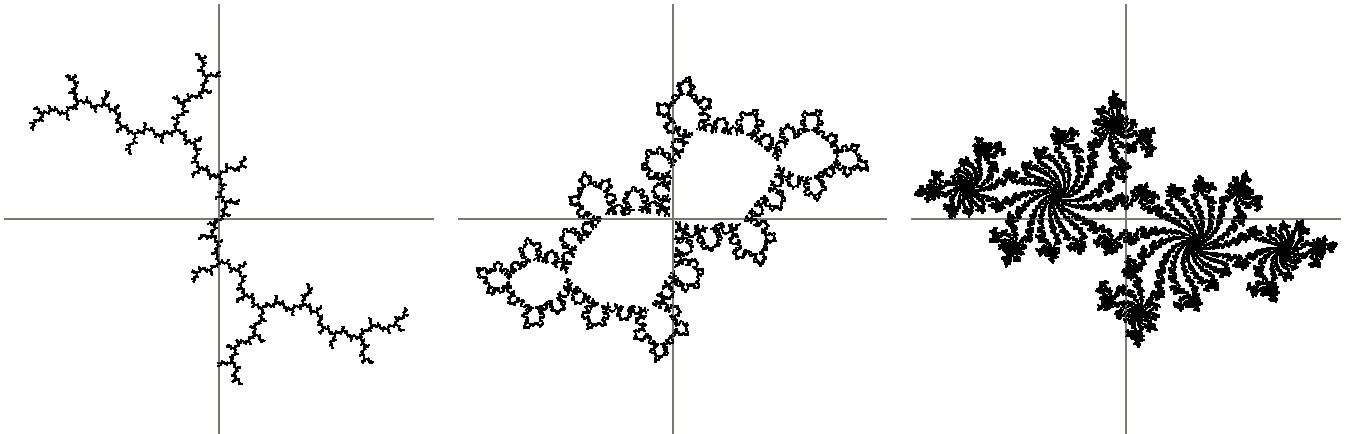
$$d_H = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2}.$$

Arvot ovat sitä tarkempia, mitä pienempi c on.

Mandelbrotin joukko

Jo pitkään on tiedetty, että funktion p_c Julian joukot ovat joillakin c :n arvoilla yhtenäisiä ja toisilla epäyhtenäisiä. Epäyhtenäiset joukot ovat ns. Cantorin joukkoja, eli ne koostuvat äärettömästä määrästä erillisiä pisteitä. Epäyhtenäiset joukot syntyvät yleensä suuremmilla c :n arvoilla kuin yhtenäiset. Esimerkiksi jos $|c| > 2$, on $J(p_c)$ aina yhtenäinen. Julian ja Fatoun aikaan ei kuitenkaan pystytty tarkasti sanomaan, millaiselta alueelta c piti valita, jotta saataisiin aikaiseksi yhtenäinen Julian joukko. Julia ja Fatou saivat kuitenkin selville, että Julian joukon yhtenäisyys voidaan päätellä funktion kriittisten pisteiden avulla. Funktiolla p_c on kaksi kriittistä pistettä: nolla ja ääretön. Jos piste 0 kuuluu äärettömän attraktion altaaseen, niin funktiolla ei voi äärettömän lisäksi olla muita attraktoreita, sillä jokaisen attraktorin altaassahan on oltava vähintään yksi kriittinen piste. Tällöin Julian joukolla ei voi olla "sisäpuolta". Mm. tätä tietoa hyödyntäen Julia ja Fatou osoittivat, että $J(p_c)$ on yhtenäinen jos ja vain jos nolla kuuluu äärettömän attraktiivon altaaseen.

Niiden kompleksitason pisteiden joukkoa, joille $J(p_c)$ on yhtenäinen, kutsutaan nykyään Mandelbrotin joukoksi Benoit B. Mandelbrotin mukaan, joka ensimmäisenä tuotti tietokoneella kuvan



Kuva 7: Julian joukot funktiolle $p_c(z) = z^2 + c$, kun $c = i$, $c = -0,39054 - 0,58679i$ ja $c = -0,6830 + 0,3328i$. Kuva-ala on kaikissa $[-1,5 - 1,5i; 1,5 + 1,5i]$. Julian joukko $c = i$ on tyypillinen dendriitti.

tästä joukosta 1970-luvun lopussa [7] [9]. Merkitsemme Mandelbrotin joukkoa M :llä. (ks. kuva 6) Mandelbrotin joukkoa on sanottu matematiikan kauneimmaksi ja monimutkaisimmaksi kuvioksi. Sen reunaviiva on fraktaalinen, ja sen Hausdorff-Besicovitch dimensio on 2, eli se on monimutkaisin mahdollinen käyrä, joka voi esiintyä kaksiulotteisessa avaruudessa.

Mandelbrotin joukkoa on sanottu yhden sivun kartaksi kaikista Julian joukoista, sillä sen reunaviivan muoto jonkin pisteen c läheisyydessä muistuttaa vastaavan Julian joukon ($J(p_c)$) muotoja. Tämä on luonnollista, sillä koska jokainen Mandelbrotin joukon piste c vastaa Julian joukon $J(p_c)$ pistettä 0, se vastaa myös sen pistettä c ($p_c(0) = 0^2 + c = c$). Tällöin liikkuminen jossakin Mandelbrotin joukon paikassa vastaa liikkumista vastaavan Julian joukon samassa paikassa. Julian joukko kuitenkin muuttuu jatkuvasti c :n arvon muuttuessa.

Mandelbrotin joukko kertoo muutakin Julian joukoista. Esimerkiksi kaikki ne c :n arvot, joilla p_c :llä on jokin attraktiivinen kiinteä piste sijaitsivat Mandelbrotin joukon kardioidin muotoisessa osassa. Vastaavasti jokaista Mandelbrotin joukon ”ympyrää” vastaa jokin kokonaisluku, joka kertoo, montako pistettä on funktion p_c äärellisessä attraktiivisessa syklissä, kun c valitaan kyseisen ympyrän sisältä. Kuvaan 6 on merkitty numeroilla kutakin ympyrää vastaava jakso.

Esimerkiksi kuvan 1 ylemmän Julian joukon tuottamiseen käytetty c on pääkardioidin yläpuolella suuren ympyrän keskipiste. Ympyröiden keskipisteet ovat aina attraktiivisia jaksollisia pisteitä.

Jos p_c on jokin jaksollinen sykli s , muodostaa tämän syklin attraktion allas Julian joukolle ”sisäpuolen”, eli $J(p_c) = \partial A(s) = A(\infty)$, ja Julian joukko on yhtenäinen. Mandelbrotin joukossa on kuitenkin myös pisteitä, joiden p_c :llä ei ole yhtään äärellistä jaksollista sykliä. Tällaisia ovat mm. ns. Misiurewiczin pisteet. Ne ovat sellaisia Mandelbrotin joukon pisteitä c , joille 0 on funktion p_c esijaksollinen, mutta ei jaksollinen piste. Tällaisten pisteiden Julian joukkoja kutsutaan dendriiteiksi. Niillä ei ole ”sisäpuolta”, mutta ne ovat kuitenkin yhtenäisiä. Tällainen on esimerkiksi $J(p_{-1})$ (ks. kuva 7).

Kuvien tuottaminen Julian ja Mandelbrotin joukoista on varsin yksinkertaista. Funktiolle p_c voidaan osoittaa, että jos kiertoradan jokin piste on itseisarvoltaan suurempi kuin 2 ja suurempi kuin c :n itseisarvo, niin kiertorata lähestyy ääretöntä. Jos itseisarvo ei ylitä tuota rajaa esimerkiksi 128 ensimmäisen iteraatiokerran aikana, voidaan melko varmasti todeta, että piste c kuuluu Mandelbrotin joukkoon, tai että se on Julian joukon ”sisäpuolella”. Usein käytetyn efektin saa aikaan värittämällä jokainen piste sen mukaan, kuinka monennella iteraatiolla itseisarvo ylitti valitun rajan. Kuvien tuottami-

seksi on myös saatavilla lukuisia valmiita tietokoneohjelmia, joista muutamia on lueteltu Seepian Internetsivulla.

Sampo Tiensuu

Kirjallisuutta

- [1] **Blanchard, B.:** *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bulletin of the American Mathematical Society 11 (1984): 85–141.
- [2] **Devaney, R. L.:** *Julia Sets and Bifurcation Diagrams For Exponential Maps*. Bulletin of the American Mathematical Society 11 (1984): 167–171.
- [3] **Devaney, R. L.:** *Fractal Patterns Arising in Chaotic Dynamical Systems*. Kirjassa [12].
- [4] **Devaney, R. L.:** *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [5] **Falconer, K. J.:** *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley Sons, 1999.
- [6] **Julia, G.:** *Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*. Journal de Mathématiques pures et Appliquées 83 (1918): 47–245.
- [7] **Mandelbrot, B. B.:** *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York 1983 (1977).
- [8] **Mandelbrot, B. B.:** *Fractal Aspects of the Iteration of $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ for complex λ and z* . Annals of the New York Academy of Sciences 357 (1980): 249–259.
- [9] **Mandelbrot, B. B.:** *Fractals and the Rebirth of Iteration Theory*. Kirjassa [11].
- [10] **Peitgen, H.-O.:** *Fantastic Deterministic Fractals*. Kirjassa [12].
- [11] **Peitgen, H.-O.; Richter, P. H. (toim.)** *The Beauty of Fractals – Images of Complex Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1986.
- [12] **Peitgen, H.-O.; Saupe, D. (toim.)** *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York 1988.
- [13] **Ruelle, D.:** *Repellers for Real Analytic Maps*. Ergodic Theory and Dynamical Systems 2 (1982): 99–107.
- [14] **Saupe, D.:** *Efficient Computation of Julia Sets and Their Fractal Dimension*. Physica 28D (1987): 358–370.
- [15] **Tiensuu, S.:** *Luonnon geometriaa*. Seepia 1 (1999): 22–26.